

Soustavy rovnic

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na www.jarjurek.cz.

1. Soustavy rovnic

Soustava rovnic je zápis dvou nebo více rovnic, které musí platit současně.

V soustavě rovnic se může vyskytovat různý počet neznámých. My se zaměříme na takové soustavy rovnic, kde počet neznámých odpovídá počtu rovnic v soustavě (tedy budeme řešit např. soustavu dvou rovnic o dvou neznámých nebo soustavu třech rovnic o třech neznámých, apod.)

Soustavy rovnic můžeme řešit různými metodami - např.:

- metodou dosazovací
- metodou sčítací
- metodou, která kombinuje metodu sčítací a dosazovací
- metodou grafickou
- pomocí matic, resp. determinantů

Zatím se omezíme na první dvě z uvedených metod.

Řešení soustav rovnic metodou dosazovací

Tento způsob řešení je založen na postupu, kdy z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a tu pak dosadíme do zbývajících rovnic soustavy. Pokud byla zadána soustava dvou rovnic, pak už nyní řešíme jednu rovnici o jedné neznámé. Pokud původní soustava obsahovala tři nebo více rovnic, postup vyjádření neznámé opakujeme.

Metoda dosazovací je vhodná tehdy, pokud u rovnic v základním tvaru (tj. u rovnic, které dostaneme po odstranění závorek a zlomků a následném sloučení členů) je alespoň u jedné neznámé v některé z rovnic koeficient 1 nebo (-1). Lze ji ale použít i jindy.

Metoda dosazovací se dále používá tehdy, je-li zadána soustava jedné lineární a jedné kvadratické rovnice. Takovými se ale budeme zabývat později.

Metoda dosazovací se s úspěchem dá použít i při řešení soustav třech nebo více rovnic.

Ukázkové příklady:

Příklad 1:

Řešte soustavu rovnic:

$$x + y = 3$$

$$x - y = -1$$

$$x = 3 - y$$

$$(3 - y) - y = -1$$

$$3 - y - y = -1$$

$$-2y = -4$$

$$y = 2$$

$$x = 3 - 2$$

$$x = 1$$

Výsledek zapišeme: $[x; y] = [1; 2]$

Zkouška:

$$L_1 = 1 + 2 = 3$$

$$P_1 = 3$$

$$L_2 = 1 - 2 = -1$$

$$P_2 = -1$$

$$L_1 = P_1 \quad L_2 = P_2$$

Příklad 2:

Řešte soustavu rovnic:

$$2 \cdot (x + y) - 5 \cdot (y - x) = 17$$

$$3 \cdot (x + 2y) + 7 \cdot (3x + 5y) = 7$$

Řešení:

$$2 \cdot (x + y) - 5 \cdot (y - x) = 17$$

$$3 \cdot (x + 2y) + 7 \cdot (3x + 5y) = 7$$

$$2x + 2y - 5y + 5x = 17$$

$$3x + 6y + 21x + 35y = 7$$

$$7x - 3y = 17$$

$$24x + 41y = 7$$

$$x = \frac{17 + 3y}{7}$$

$$24 \cdot \frac{17 + 3y}{7} + 41y = 7$$

$$\frac{408 + 72y}{7} + 41y = 7$$

$$408 + 72y + 287y = 49$$

$$359y = -359$$

$$y = -1$$

$$x = 2$$

Výsledek zapíšeme $[x; y] = [2; -1]$

Zkouška:

$$L_1 = 2 \cdot [2 + (-1)] - 5 \cdot (-1 - 2) = 2 - 5 \cdot (-3) = 17$$

$$P_1 = 17$$

$$L_2 = 3 \cdot [2 + 2 \cdot (-1)] + 7 \cdot [3 \cdot 2 + 5 \cdot (-1)] = 3 \cdot 0 + 7 \cdot 1 = 7$$

$$P_2 = 7$$

$$L_1 = P_1 \quad L_2 = P_2$$

Příklad 3:

Řešte soustavu rovnic

$$x - y = 1$$

$$3x - 3y = 3$$

$$x = 1 + y$$

$$3 \cdot (1 + y) - 3y = 3$$

$$3 + 3y - 3y = 3$$

$$0 = 0$$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Výsledek zapíšeme:

$$[x; y] = [x; x - 1]$$

(v tomto obecném zápisu výsledku první neznámou volíme libovolně a druhou neznámou vyjádříme ze kterékoliv zadané rovnice)

Ověření správnosti řešení:

Pro $x = 1$ dostáváme $[1; 0]$

$$L_1 = 1 - 0 = 1$$

$$P_1 = 1$$

$$L_2 = 3 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 3$$

$$P_2 = 3$$

$$L_1 = P_1 \quad L_2 = P_2$$

Shrnutí postupu řešení soustavy rovnic dosazovací metodou:

1. Jsou-li ve jmenovateli neznámé, stanovíme podmínky řešitelnosti
2. Rovnice upravíme do "základního" tvaru, tj. do tvaru, kdy na levé straně rovnice máme sloučené neznámé (v pořadí podle abecedy) a na pravé straně máme číslo; používáme přitom běžného postupu řešení samostatných rovnic - tedy nejprve odstraňujeme závorky, pak zlomky, atd.
3. Z libovolné rovnice vyjádříme libovolnou neznámou (výhodné je volit tu, kde je koeficient 1).
4. Tuto vyjádřenou neznámou dosadíme do zbývajících rovnic (příp. do zbývajících rovnic, je-li jich více).
5. Vyřešíme vzniklou rovnici o jedné neznámé běžným způsobem (platí tehdy, pokud byla zadána soustava dvou rovnic o dvou neznámých; pokud rovnic bylo více, vznikla nám nyní soustava více rovnic a musíme dále opakovat kroky 2) - 4)).
6. Vypočtenou neznámou dosadíme do rovnice, kde jsme vyjádřili první neznámou (krok 3)) a vyřešíme druhou neznámou.
7. Provedeme zkoušku, a to tak, že dosazujeme do každé strany každé rovnice.
8. Zapišeme výsledek uspořádanou dvojicí.

Řešení soustav rovnic metodou sčítací

Sčítací metodu je výhodné použít tehdy, pokud je u všech neznámých v rovnicích upravených do "základního" tvaru koeficient jiný než číslo 1 nebo (-1). Lze ji s výhodou ale samozřejmě použít i v případě, že tam jednička je.

Sčítací metodu používáme zpravidla u soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Je ji ale možno použít i pro více rovnic.

Ukázkové příklady:

Příklad 5:

Řešte soustavu rovnic:

$$2 \cdot (x - 3y) = 15$$

$$4x - y = -3$$

$$2x - 6y = 15 \quad (1)$$

$$4x - y = -3$$

Rovnice upravíme tak, aby po jejich sečtení vypadla neznámá x. Znamená to, že první rovnici vynásobíme číslem (-2) a druhou necháme beze změn.

Pozn.: Sečíst rovnice znamená sečíst jejich levé strany a jejich pravé strany.

$$-4x + 12y = -30$$

$$4x - y = -3$$

Rovnice sečteme

$$-4x + 4x + 12y - y = -30 - 3$$

$$11y = -33$$

$$y = -3$$

Vrátíme se k rovnicím v zápisu (1), tj. k rovnicím upraveným do "základního" tvaru. Nyní je upravíme tak, aby po jejich sečtení vypadla neznámá y. Stačí tedy první rovnici ponechat a druhou vynásobit číslem (-6):

$$2x - 6y = 15$$

$$-24x + 6y = 18$$

Obě rovnice opět sečteme:

$$2x - 24x - 6y + 6y = 15 + 18$$

$$-22x = 33$$

$$x = -1,5$$

Zapišeme výsledek: $[x; y] = [-1,5; -3]$

Zkouška se provádí stejným způsobem jako u dosazovací metody.

Pozn.: Někdy se soustava rovnic také řeší tak, že jednu neznámou vyřešíme sčítací metodou a vzniklý kořen pak dosadíme do některé ze zadaných rovnic. Vyřešením rovnice o jedné neznámé pak získáme kořen druhý. V tomto případě ale už nelze hovořit o sčítací metodě.

Pozn.: Pokud chceme řešit sčítací metodou soustavu více než dvou rovnic, pak postupujeme tak, že např. v soustavě třech rovnic, která je v "základním" tvaru, upravíme rovnice tak, aby po sečtení libovolných dvou rovnic vypadla jedna neznámá a při sečtení jiné libovolné dvojice vypadla tatáž neznámá. Tím získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou pak řešíme podle postupu v příkladu 5.

2. Soustavy rovnic - jednoduché procvičovací příklady

1. **Řešte soustavu rovnic:**

$$\frac{9x+2y}{7} = \frac{x-3y}{4}$$

$$\frac{2x+y}{3} = \frac{x-y+1}{9}$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [1; -1]

2. **Řešte soustavu rovnic:**

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + 10 = x.(x+6) + y.(y+6)$$

$$(x+1)^2 - (y+1)^2 + 8 = x.(x-6) - y.(y-6)$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [1; 2]

3. **Řešte soustavu rovnic:**

$$\frac{2-x}{3} - y = -\frac{7}{3}$$

$$x + 2y = 7$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [3; 2]

4. **Řešte soustavu rovnic:**

$$3x + y = 9$$

$$x + 2y = -2$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [4; -3]

5. **Řešte soustavu rovnic:**

$$x + 2y = 1$$

$$x - y = 4$$

OK Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [3; -1].

6. **Řešte soustavu rovnic:**

$$\frac{x+1}{3} - \frac{y+2}{4} = \frac{2.(x-y)}{5}$$

$$\frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = 2y - x$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [11; 6]

7. **Řeš soustavu rovnic:**

$$\frac{9x+2y}{7} = \frac{x-3y}{4}$$

$$y - x = 1 - 3.(2x + y)$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [1; -1]

8. **Řešte soustavu rovnic:**
 $2x + 3y = 8$
 $4 - x = \frac{3}{2}y$
OK: Nekonečně mnoho řešení 2707
9. **Řešte soustavu rovnic:**
 $x - y = 5$
 $x - 2y = 2$
OK: Řešením je uspořádaná dvojice [8; 3] 2710
10. **Řešte soustavu rovnic:**
 $\frac{2x - 3y + 1}{6} = \frac{3x - 8y}{4} - \frac{1}{9}$
 $\frac{2x + 3y + 2}{6} = \frac{5x - y}{10} - \frac{1}{15}$
OK: Soustava nemá řešení. 2701
11. **Řešte soustavu rovnic:**
 $x + 2y = 3$
 $2x + 4y = 6$
OK: Nekonečně mnoho řešení 2697
12. **Řešte soustavu rovnic:**
 $x + y = 6$
 $x - y = 2$
OK: Řešením je uspořádaná dvojice [4; 2] 2704
13. **Řešte soustavu rovnic:**
 $(x + 5) \cdot (y - 2) = (x + 2) \cdot (y - 1)$
 $(x - 4) \cdot (y + 7) = (x - 3) \cdot (y + 4)$
OK: Řešením je uspořádaná dvojice [7; 5] 2709
14. **Řešte soustavu rovnic:**
 $2x - y = 2$
 $2x - y = 10$
OK: Nemá řešení 2711
15. **Řešte soustavu rovnic:**
 $2x + y - 5 = 0$
 $3x - y = 0$
OK: Řešení je uspořádaná dvojice [1; 3] 2705
16. **Řešte soustavu rovnic:**
 $12x + 16y + 1 = 0$
 $3x + 4y + 2 = 0$
OK: Nemá řešení. 2706



3. Soustavy rovnic - složitější procvičovací příklady

1. **Řešte soustavu rovnic:**

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{2}$$

$$x:y = 1:6$$

OK [1; 6]

2716

2. **Řešte soustavu rovnic:**

$$\frac{10}{x+5} + \frac{1}{y+2} = 1$$

$$\frac{25}{x+5} - \frac{2}{y+2} = 1$$

OK [10; 1]

2717

3. **Řešte soustavu rovnic:**

$$\frac{3}{x} + \frac{8}{y} = 3$$

$$\frac{15}{x} - \frac{4}{y} = 4$$

OK [3; 4]

2734

4. **Řešte soustavu rovnic:**

$$\frac{4}{x+2y} - \frac{1}{x-2y} = 1$$

$$\frac{20}{x+2y} + \frac{3}{x-2y} = 1$$

OK [3; 2,5]

2735

5. **Řešte soustavu rovnic:**

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 1$$

OK $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right]$

2715

 **Obsah**

 1. <i>Soustavy rovnic</i>	2
 2. <i>Soustavy rovnic - jednoduché procvičovací příklady</i>	5
 3. <i>Soustavy rovnic - složitější procvičovací příklady</i>	6