Variace

1

Soustavy rovnic pro učební obory

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

1. Soustavy rovnic

Soustava rovnic je zápis dvou nebo více rovnic, které musí platit současně.

V soustavě rovnic se může vyskytovat různý počet neznámých. My se zaměříme na takové soustavy rovnic, kde počet neznámých odpovídá počtu rovnic v soustavě (tedy budeme řešit např. soustavu dvou rovnic o dvou neznámých nebo soustavu třech rovnic o třech neznámých, apod.)

Soustavy rovnic můžeme řešit různými metodami - např.:

- metodou dosazovací
- metodou sčítací
- metodou, která kombinuje metodu sčítací a dosazovací
- metodou grafickou
- pomocí matic, resp. determinantů

Zatím se omezíme na první dvě z uvedených metod.

Řešení soustav rovnic metodou dosazovací

Tento způsob řešení je založen na postupu, kdy z jedné rovnice vyjádříme jednu neznámou a tu pak dosadíme do zbývajících rovnic soustavy. Pokud byla zadána soustava dvou rovnic, pak už nyní řešíme jednu rovnici o jedné neznámé. Pokud původní soustava obsahovala tři nebo více rovnic, postup vyjádření neznámé opakujeme.

Metoda dosazovací je vhodná tehdy, pokud u rovnic v základním tvaru (tj. u rovnic, které dostaneme po odstranění závorek a zlomků a následném sloučení členů) je alespoň u jedné neznámé v některé z rovnic koeficient 1 nebo (-1). Lze ji ale použít i jindy.

Metoda dosazovací se dále používá tehdy, je-li zadána soustava jedné lineární a jedné kvadratické rovnice. Takovými se ale budeme zabývat později.

Metoda dosazovací se s úspěchem dá použít i při řešení soustav třech nebo více rovnic.

Ukázkové příklady:

Příklad 1:

Řešte soustavu rovnic:

x + y = 3

$\underline{x - y = -1}$

x = 3 - y

(3 - y) - y = -1

3 - y - y = -1

-2y = -4

y = 2

x = 3 - 2

x = 1

Výsledek zapíšeme: [x; y] = [1; 2]

Zkouška:

$L_1 = 1 + 2 = 3$

$P_1 = 3$

$L_2 = 1 - 2 = -1$

$P_2 = -1$

$L_1 = P_1$ $\qquad$ $L_2 = P_2$

Příklad 2:

Řešte soustavu rovnic:

2 . (x + y) - 5 . (y - x) = 17

$\underline{3 . (x + 2y) + 7 . (3x + 5y) = 7}$

Řešení:

$2 . (x + y) - 5 . (y - x) = 17$

$\underline{3 . (x + 2y) + 7 . (3x + 5y) = 7}$

$2x + 2y - 5y + 5x = 17$

$\underline{3x + 6y + 21x + 35y = 7}$

$7x - 3y = 17$

$\underline{24x + 41y = 7}$

$$x = \frac{17 + 3y}{7}$$

$$24.\frac{17 + 3y}{7} + 41y = 7$$

$$\frac{408 + 72y}{7} + 41y = 7$$

$408 + 72y + 287y = 49$

$359y = -359$

$y = -1$

$x = 2$

Výsledek zapíšeme $[x; y] = [2; -1]$

Zkouška:

$L_1 = 2 . [2 + (-1)] - 5 . (-1 - 2) = 2 - 5 . (-3) = 17$

$P_1 = 17$

$L_2 = 3 . [2 + 2.(-1)] + 7 . [3 . 2 + 5 . (-1)] = 3 . 0 + 7 . 1 = 7$

$P_2 = 7$

$L_1 = P_1 \qquad L_2 = P_2$

Příklad 3:

Řešte soustavu rovnic

$x - y = 1$

$\underline{3x - 3y = 3}$

$x = 1 + y$

$3 . (1 + y) - 3y = 3$

$3 + 3y - 3y = 3$

$0 = 0$

Soustava má nekonečně mnoho řešení. Výsledek zapíšeme:

$[x; y] = [x; x - 1]$

(v tomto obecném zápisu výsledku první neznámou volíme libovolně a druhou neznámou vyjádříme ze kterékoliv zadané rovnice)

Ověření správnosti řešení:

Pro $x = 1$ dostáváme $[1; 0]$

$L_1 = 1 - 0 = 1$

$P_1 = 1$

$L_2 = 3 . 1 - 3 . 0 = 3$

$P_2 = 3$

$L_1 = P_1 \qquad L_2 = P_2$

Shrnutí postupu řešení soustavy rovnic dosazovací metodou:

1. Jsou-li ve jmenovateli neznámé, stanovíme podmínky řešitelnosti
2. Rovnice upravíme do "základního" tvaru, tj. do tvaru, kdy na levé straně rovnice máme sloučené neznámé (v pořadí podle abecedy) a na pravé straně máme číslo; používáme přitom běžného postupu řešení samostatných rovnic - tedy nejprve odstraňujeme závorky, pak zlomky, atd.
3. Z libovolné rovnice vyjádříme libovolnou neznámou (výhodné je volit tu, kde je koeficient 1).
4. Tuto vyjádřenou neznámou dosadíme do zbývající rovnice (příp. do zbývajících rovnic, je-li jich více).
5. Vyřešíme vzniklou rovnici o jedné neznámé běžným způsobem (platí tehdy, pokud byla zadána soustava dvou rovnic o dvou neznámých; pokud rovnic bylo více, vznikla nám nyní soustava více rovnic a musíme dále opakovat kroky 2) - 4)).
6. Vypočtenou neznámou dosadíme do rovnice, kde jsme vyjádřili první neznámou (krok 3)) a vyřešíme druhou neznámou.
7. Provedeme zkoušku, a to tak, že dosazujeme do každé strany každé rovnice.
8. Zapíšeme výsledek uspořádanou dvojicí.

Řešení soustav rovnic metodou sčítací

Sčítací metodu je výhodné použít tehdy, pokud je u všech neznámých v rovnicích upravených do "základního" tvaru koeficient jiný než číslo 1 nebo (-1). Lze ji s výhodou ale samozřejmě použít i v případě, že tam jednička je.

Sčítací metodu používáme zpravidla u soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. Je ji ale možno použít i pro více rovnic.

Ukázkové příklady:

Příklad 5:

Řešte soustavu rovnic:

$2 \cdot (x - 3y) = 15$

$\underline{4x - y = -3}$

$2x - 6y = 15$ (1)

$\underline{4x - y = -3}$

Rovnice upravíme tak, aby po jejich sečtení vypadla neznámá x. Znamená to, že první rovnici vynásobíme číslem (-2) a druhou necháme beze změn.

Pozn.: Sečíst rovnice znamená sečíst jejich levé strany a jejich pravé strany.

$-4x + 12y = -30$

$\underline{4x - y = -3}$

Rovnice sečteme

$-4x + 4x + 12y - y = -30 - 3$

$11y = -33$

$y = -3$

Vrátíme se k rovnicím v zápisu (1), tj. k rovnicím upraveným do "základního" tvaru. Nyní je upravíme tak, aby po jejich sečtení vypadla neznámá y. Stačí tedy první rovnici ponechat a druhou vynásobit číslem (-6):

$2x - 6y = 15$

$\underline{-24x + 6y = 18}$

Obě rovnice opět sečteme:

$2x - 24x - 6y + 6y = 15 + 18$

$-22x = 33$

$x = -1{,}5$

Zapíšeme výsledek: $[x; y] = [-1{,}5; -3]$

Zkouška se provádí stejným způsobem jako u dosazovací metody.

Pozn.: Někdy se soustava rovnic také řeší tak, že jednu neznámou vyřešíme sčítací metodou a vzniklý kořen pak dosadíme do některé ze zadaných rovnic. Vyřešením rovnice o jedné neznámé pak získáme kořen druhý. V tomto případě ale už nelze hovořit o sčítací metodě.

Pozn.: Pokud chceme řešit sčítací metodou soustavu více než dvou rovnic, pak postupujeme tak, že např. v soustavě třech rovnic, která je v "základním" tvaru, upravíme rovnice tak, aby po sečtení libovolných dvou rovnic vypadla jedna neznámá a při sečtení jiné libovolné dvojice vypadla tatáž neznámá. Tím získáme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kterou pak řešíme podle postupu v příkladu 5.

2. Soustavy rovnic - procvičovací příklady

1. **Řešte soustavu rovnic:** 2706
12x + 16y + 1 = 0
3x + 4y + 2 = 0

OK Nemá řešení.

2. **Řešte soustavu rovnic:** 2703
3x + y = 9
x + 2y = -2

OK Řešením je uspořádaná dvojice [4; -3]

3. **Řešte soustavu rovnic:** 2704
x + y = 6
x - y = 2

OK Řešením je uspořádaná dvojice [4; 2]

4. **Řešte soustavu rovnic:** 2701

$$\frac{2x-3y+1}{6}=\frac{3x-8y}{4}-\frac{1}{9}$$

$$\frac{2x+3y+2}{6}=\frac{5x-y}{10}-\frac{1}{15}$$

OK Soustava nemá řešení.

5. **Řešte soustavu rovnic:** 2705
2x + y - 5 = 0
3x - y = 0

OK Řešení je uspořádaná dvojice [1; 3]

6. **Řešte soustavu rovnic:** 2707

$$2x+3y=8$$

$$4-x=\frac{3}{2}y$$

OK Nekonečně mnoho řešení

7. **Řeš soustavu rovnic:** 2700

$$\frac{9x+2y}{7}=\frac{x-3y}{4}$$

$$y-x=1-3.(2x+y)$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [1; -1]

8. **Řešte soustavu rovnic:** 2697
x + 2y = 3
2x + 4y = 6

OK Nekonečně mnoho řešení

9. **Řešte soustavu rovnic:** 2709
(x + 5) . (y - 2) = (x + 2) . (y - 1)
(x - 4) . (y + 7) = (x - 3) . (y + 4)

OK Řešením je uspořádaná dvojice [7; 5]

10. **Řešte soustavu rovnic:** 2702

$$(x+1)^2+(y+1)^2+10=x.(x+6)+y.(y+6)$$
$$(x+1)^2-(y+1)^2+8=x.(x-6)-y.(y-6)$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [1; 2]

11. **Řešte soustavu rovnic:** 2711
2x - y = 2
2x - y = 10

OK Nemá řešení

12. **Řešte soustavu rovnic:** 2698
x + 2y = 1
x - y = 4

OK Řešením soustavy je uspořádaná dvojice [3; -1].

13. **Řešte soustavu rovnic:** 2712

$$\frac{2-x}{3}-y=-\frac{7}{3}$$
$$x+2y=7$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [3; 2]

14. **Řešte soustavu rovnic:** 2710
x - y = 5
x - 2y = 2

OK Řešením je uspořádaná dvojice [8; 3]

15. **Řešte soustavu rovnic:** 2699

$$\frac{9x+2y}{7}=\frac{x-3y}{4}$$
$$\frac{2x+y}{3}=\frac{x-y+1}{9}$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [1; -1]

16. **Řešte soustavu rovnic:** 2708

$$\frac{x+1}{3}-\frac{y+2}{4}=\frac{2.(x-y)}{5}$$
$$\frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{3}=2y-x$$

OK Řešením je uspořádaná dvojice [11; 6]

Obsah