Variace

1

Rovnice s absolutní hodnotou

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

1. Rovnice s absolutní hodnotou

Rovnice s absolutní hodnotou je taková rovnice, která ve svém zadání obsahuje jednu nebo více absolutních hodnot. I v tomto případě se může jednat jak o rovnici lineární, tak o rovnici kvadratickou.

Připomeňme si:

Absolutní hodnota kladného čísla je kladné číslo.

- př. $|5| = 5$

Absolutní hodnota nuly je nula.

- př.: $|0| = 0$

Absolutní hodnota záporného čísla je kladné číslo.

- př.: $|-6|=+6$

Dále platí:

$|a|= a$ ... pro $a > 0$

$|a|= -a$ ... pro $a < 0$

$|a|= 0$ ... pro $a = 0$

Postup při řešení lineárních rovnic s absolutní hodnotou:

1. Stanovíme tzv. nulové body, tj. určíme čísla, pro něž jsou zadané absolutní hodnoty nulové.
2. Nulové body znázorníme na číselné ose.
3. Z číselné osy vytvoříme - za pomoci zakreslených nulových bodů - intervaly, které užijeme v dalším řešení; mezní bod je výhodnější vztahovat do "vyššího" intervalu.
4. Vytvoříme si tabulku, kde sloupečky představují jednotlivé intervaly a řádky zadané absolutní hodnoty; do tabulky vyznačíme, zda příslušná hodnota nabývá v daném intervalu kladné hodnoty nebo záporné hodnoty.
5. Řešíme rovnici pro jednotlivé typy intervalů, absolutní hodnoty odstraňujeme tak, že pokud nabývá v zadaném intervalu kladné hodnoty, přeměníme ji na závorku a pokud nabývá záporné hodnoty, též ji přeměníme na závorku, avšak změníme znaménka všech členů v závorce na opačná. Kořen rovnice vždy konzultujeme, zda vyhovuje zadanému intervalu; pokud ne, kořen je v tomto případě neplatný. Pokud v některém intervalu vyjde závěr "nekonečně mnoho řešení", pak řešením této části rovnice je zadaný interval, v němž jsme řešili.
6. Všechna vzniklá řešení sloučíme do množiny, případně intervalů.

Ukázkové příklady:

Příklad 1:

Řešte v oboru reálných čísel rovnici:

$$|x + 1| - |x| + 3 \,.\, |x - 1| = 2 \,.\, |x - 2| + x + 2$$

Řešení:

Nulové body: -1; 0; 1; 2

	$x \in (-\infty; -1)$	$x \in \langle -1; 0)$	$x \in \langle 0; 1)$	$x \in \langle 1; 2)$	$x \in \langle 2; +\infty)$
$\lvert x+ 1\rvert$	-	+	+	+	+

|x|	-	-	+	+	+
|x - 1|	-	-	-	+	+
|x - 2|	-	-	-	-	+

1. Řešení pro x ∈ (-∞; -1)

(-x - 1) - (-x) + 3.(-x + 1) = 2.(-x + 2) + x + 2

-x - 1 + x - 3x + 3 = -2x + 4 + x + 2

-2x = 4

x = -2 ... zadanému intervalu vyhovuje

2. Řešení pro x ∈ <-1; 0)

(x + 1) - (-x) + 3.(-x + 1) = 2.(-x + 2) + x + 2

x + 1 + x - 3x + 3 = -2x + 4 + x + 2

0 = 2 ... nemá řešení

3. Řešení pro x ∈ <0; 1)

(x + 1) - (x) + 3.(-x + 1) = 2.(-x + 2) + x + 2

x + 1 - x - 3x + 3 = -2x + 4 + x + 2

-2x = 2

x = -1 ... zadanému intervalu nevyhovuje

4. Řešení pro x ∈ <1; 2)

(x + 1) - (x) + 3.(x - 1) = 2.(-x + 2) + x + 2

x + 1 - x + 3x - 3 = -2x + 4 + x + 2

4x = 8

x = 2 ... zadanému intervalu nevyhovuje

5. Řešení pro x ∈ <2; +∞)

(x + 1) - (x) + 3.(x - 1) = 2.(x - 2) + x + 2

x + 1 - x + 3x - 3 = 2x - 4 + x + 2

0 = 0 ... řešení x ∈ <2; +∞)

Celkový závěr: **x ∈ {-2} ∪ <2; +∞)**

<u>Příklad 2:</u>

Řešte v oboru reálných čísel rovnici:

$$\frac{|12-4a|}{12-4a}=1$$

Řešení:

Nulovým bodem je číslo 3.

	x ∈ (-∞; 3)	x ∈ (3; +∞)
|12 - 4a|	+	-

1. Řešení pro x ∈ (-∞; 3)

$$\frac{(12-4a)}{12-4a}=1$$

12 - 4a = 12 - 4a

0 = 0 ... řešením je x ∈ (-∞; 3)

2. Řešení pro x ∈ (3; +∞) (Interval je otevřený vzhledem k podmínce řešitelnosti)

$$\frac{(-12+4a)}{12-4a}=1$$

-12 + 4a = 12 - 4a

8a = 24

a = 3 ... nevyhovuje zadanému intervalu

Celkový závěr: x ∈ (-∞; 3)

2. Rovnice s absolutní hodnotou - procvičovací příklady

1. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2567
3 + 4 . |x - 2| = 5x

OK K = {11/9}

2. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2569
|2x - 7| + |x - 2| = 3

OK K = {2; 4}

3. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2571

$$\frac{|10a-5|}{10a-5}=-1$$

OK K = (-∞; 0,5)

4. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2568
3x - |2x - 1| = x + 1

OK K = <0,5; +∞)

5. **Řešte v oboru reálných čísel rovnici:** 2564

$$||x|+3|-2x+2=0$$

OK K = {5}

6. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2570
|a - 5| = a - 5

OK K = <5; +∞)

7. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2572
|x + 2| = 0

OK -2

8. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2576
$|3x + 5| = 3x + 13$
OK -3

9. **Řešte v oboru reálných čísel rovnici:** 2562
$|x - 6| - |x - 5| + x = 0$
OK K = {-1}

10. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2577
$|x + 3| - 3 . |x - 1| = 2x - 6$
OK K = (-∞; -3> ∪ {3}

11. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2574
$x - 5 = |x + 4|$
OK Nemá řešení

12. **Řešte v oboru reálných čísel rovnici:** 2561
$|x - 8| - |x + 3| = 15$
OK Nemá řešení

13. **Řešte rovnici:** 2565
$|x + 1| + 3 . |x - 1| = 2 . |x| + x$
OK K = {0,8; 2}

14. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2575
$2 . |x + 5| = 2x + 10$
OK K = <-5; +∞)

15. **Řešte v oboru reálných čísel rovnici:** 2563
$$\left|\left|x+2\right|-1\right|=4$$
OK K = {-7; 3}

16. **Řešte v R rovnici:** 2566
$|x + 1| + 3 . |x - 1| = 2 . |x| + 3 - x$
OK K = {-1; 1/3; 5/3}

17. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:** 2573
$5 - x = |x + 4|$
OK 0,5

Obsah