

# Goniometrie pravoúhlého trojúhelníku

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

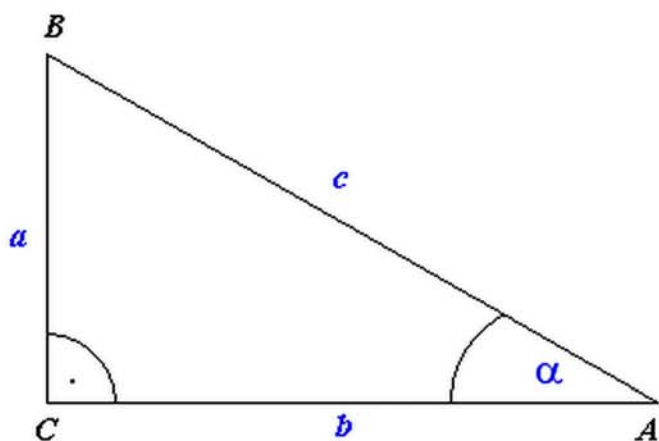
Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na [www.jarjurek.cz](http://www.jarjurek.cz).

## 1. Řešení pravoúhlého trojúhelníka

Mění-li se v pravoúhlém trojúhelníku velikost úhlu alfa, mění se i poměry délek stran v tomto trojúhelníku. Proto jsou v pravoúhlém trojúhelníku definovány tyto vztahy pro goniometrické funkce ostrého úhlu:

1. Poměr délky protilehlé odvěsny a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku se nazývá **sinus úhlu  $\alpha$** . Zapisujeme  **$\sin \alpha$** .
2. Poměr délky přilehlé odvěsny a délky přepony pravoúhlého trojúhelníku se nazývá **kosinus úhlu  $\alpha$** . Zapisujeme  **$\cos \alpha$** .
3. Poměr délky protilehlé odvěsny a délky přilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníku se nazývá **tangens úhlu  $\alpha$** . Zapisujeme  **$\text{tg } \alpha$**  (na kalkulačce bývá  $\tan \alpha$ .)
4. Poměr délky přilehlé odvěsny a délky protilehlé odvěsny pravoúhlého trojúhelníku se nazývá **kotangens úhlu  $\alpha$** . Zapisujeme  **$\text{cotg } \alpha$** .

Pozn.: S rozvojem kalkulaček funkce kotangens ztratila dost význam. Dříve se používala proto, aby se při výpočtu pomocí tabulek předešlo dělení několikanásobným číslem. Funkce kotangens výpočet změnila na násobení, což bylo snáze zvládnutelné.



$a$  ... protilehlá odvěsna     $b$  ... přilehlá odvěsna

$c$  ... přepona

$$\sin \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{přepona}} = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{protilehlá odvěsna}}{\text{přilehlá odvěsna}} = \frac{a}{b}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{\text{přilehlá odvěsna}}{\text{protilehlá odvěsna}} = \frac{b}{a}$$

Pozn.: Veškeré výpočty goniometrických funkcí budeme provádět zpravidla na kalkulačce a výsledky budeme udávat s přesností na čtyři platné číslice. Respektujeme přitom správné zaokrouhlení čísel.

Za platnou číslici se považuje každá číslice v čísle, která je na pozici počínaje od první nenulové zleva.

Pokud nebude zadáno jinak, vždy uvažujeme obvyklé značení v pravoúhlém trojúhelníku, což je: Pravý úhel při vrcholu C, přepona  $c$ , odvěsny  $a$ ,  $b$ , ostré úhly při vrcholu A, B.

**Příklad 1:**

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C je  $|AB| = c = 8 \text{ cm}$ ,  $|BC| = a = 5 \text{ cm}$ . Vypočti velikosti ostrých úhlů při vrcholech A, B trojúhelníku ABC.

**Řešení:**

$$|AB| = c = 8 \text{ cm}$$

$$|BC| = a = 5 \text{ cm}$$

$$\alpha = ? [^\circ \text{ '}]$$

$$\beta = ? [^\circ \text{ '}]$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{8}$$

$$\sin \alpha = 0,625$$

$$\alpha = 38^\circ 41'$$

$$\cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \beta = \frac{5}{8}$$

$$\cos \beta = 0,625$$

$$\beta = 51^\circ 19'$$

Závěr: Vnitřní úhel při vrcholu A má velikost  $38^\circ 41'$  a vnitřní úhel při vrcholu B má velikost  $51^\circ 19'$ .

**Příklad 2:**

V pravoúhlém trojúhelníku OPQ s pravým úhlem při vrcholu Q je  $|OQ| = p = 5 \text{ cm}$ ,  $|\sphericalangle QOP| = 35^\circ 10'$ . Vypočti délku odvěsny  $|PQ| = o$ .

**Řešení:**

$$|OQ| = p = 5 \text{ cm}$$

$$|\sphericalangle QOP| = 35^\circ 10'$$

$$|PQ| = o = ? [\text{cm}]$$

$$\text{tg} |\sphericalangle QOP| = \frac{|PQ|}{|OQ|}$$

$$|PQ| = |OQ| \cdot \text{tg} |\sphericalangle QOP|$$

$$|PQ| = 5 \cdot \text{tg} 35^\circ 10' = 5 \cdot 0,7046 = 3,5 \text{ (po zaokrouhlení)}$$

$$|PQ| = 3,5 \text{ cm (po zaokrouhlení)}$$

Závěr: Délka odvěsny je přibližně 3,5 cm.

**Příklad 3:**

Nejvyšší přípustné stoupání silnic je dáno poměrem 1 : 18. Pod jakým největším úhlem může silnice stoupat?

**Řešení:**

$$|BC| = 1 \text{ díl}$$

$$|AB| = 18 \text{ dílů}$$

$$\alpha = ? [^\circ \text{ '}]$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|BC|}{|AB|}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{18}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,0556$$

$$\alpha = 3^{\circ} 11'$$

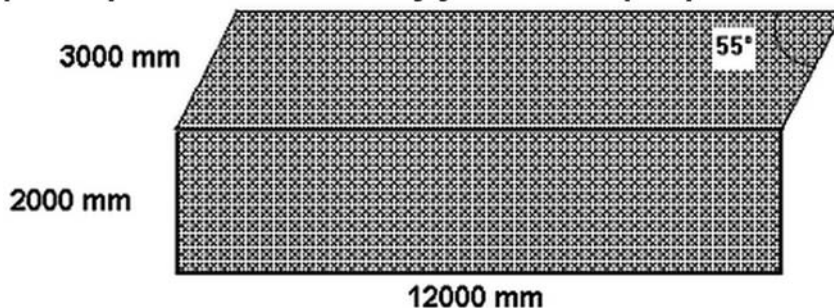
Závěr: Úsek silnice může stoupat nejvýše pod úhlem  $3^{\circ} 11'$ .

## 2. Řešení pravoúhlého trojúhelníku - procvičovací úlohy

1. Přímá železniční trať stoupá na vzdálenosti 100 m (měřeno ve vodorovné poloze) o 1,4 m. Vypočítej velikost úhlu stoupání. 1626

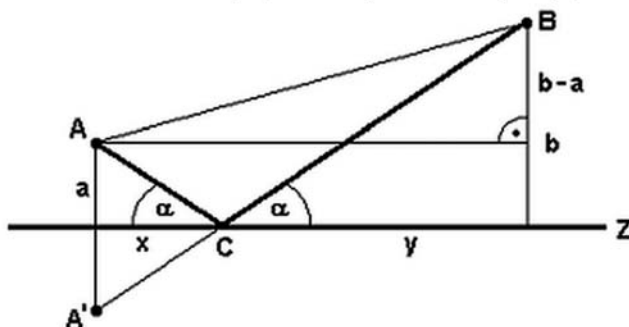
OK 0,80°

2. Jedna část střechy má tvar obrazce složeného z obdélníku a z kosodélníku (viz obrázek). Vypočti spotřebu tašek na její pokrytí, počítá-li se s 18 taškami na jeden metr čtverečný a s osmi procenty tašek navíc z důvodu jejich tvarové úpravy. 1642



OK 1040 ks

3. Před rovinným zrcadlem jsou dva body A, B vzdálené od sebe 36 cm. Vzdálenost bodu A od zrcadla je 7 cm, bodu B 18 cm. Pod jakým úhlem je třeba vést světelný paprsek (jde o úhel mezi rovinou zrcadla a paprskem) bodem A, aby po odrazu procházel bodem B? 1645



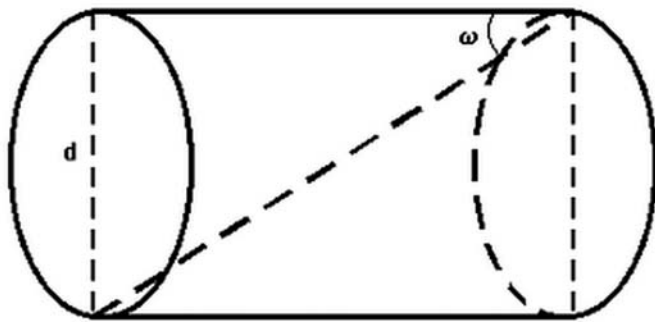
OK 36,1°

4. Řešte pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona je AB a platí:  $a = 24$  cm,  $c = 30$  cm. 1629

OK  $b = 18$  cm,  $\alpha = 53^{\circ}08'$ ,  $\beta = 36^{\circ}52'$ ,  $\gamma = 90^{\circ}$

5. Průměr podstavy válce je 36 cm. Velikost úhlu  $\omega$ , který svírá úhlopříčka osového řezu s výškou válce  $v$ , je  $30^\circ$ . Vypočti povrch válce.

1638

OK 9083 cm<sup>2</sup>

6. V pravoúhlém trojúhelníku ABC je délka přepony  $|AB| = c = 6,9$  cm a  $|\sphericalangle CAB| = \alpha = 34^\circ$ . Vypočti délky odvěsen AC a BC.

1632

OK a = 3,9 cm, b = 5,7 cm

7. Úhlopříčka obdélníkového půdorysu chaty je dlouhá 10 m a s kratší stranou tohoto půdorysu svírá úhel  $60^\circ$ . Vypočti obsah půdorysu chaty.

1635

OK 43,3 m<sup>2</sup>

8. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB je dáno:  $b = 30$  cm,  $\beta = 67^\circ$ . Vypočti délku odvěsny a.

1625

OK 12,7 cm

9. Délka a šířka obdélníku jsou v poměru 8 : 5. Jak velké úhly svírá úhlopříčka obdélníku s jeho stranami?

1634

OK S delší stranou  $32^\circ$ , s kratší stranou  $58^\circ$ .

10. Vypočti obsah kosočtverce ABCD, je-li tangens úhlu ABD roven  $\sqrt{15}$  a  $|AC| = 4$  cm.

1636

OK 2,1 cm<sup>2</sup>

11. Řešte pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona je AB a platí:  
 $\alpha = 63^\circ 10'$ ,  $a = 6,7$  m

1631

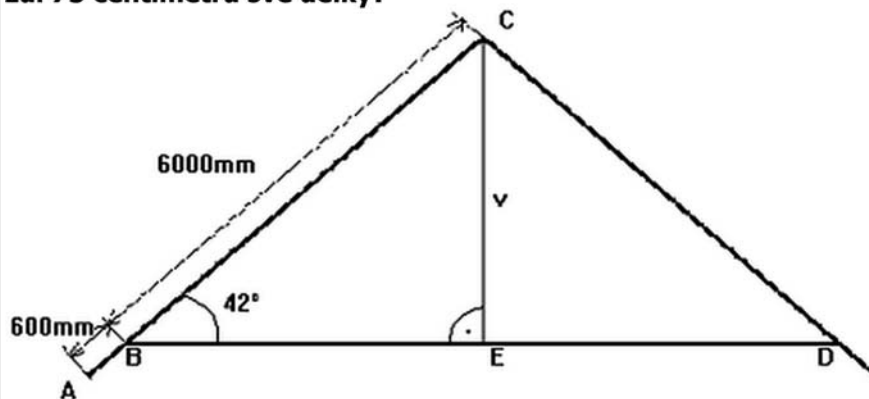
OK b = 3,39 m, c = 7,51 m,  $\beta = 26^\circ 50'$ ,  $\gamma = 90^\circ$ 

12. Řešte pravoúhlý trojúhelník ABC, jehož přepona je AB a platí:  
 $\alpha = 48^\circ 30'$ ,  $c = 3,2$  m

1630

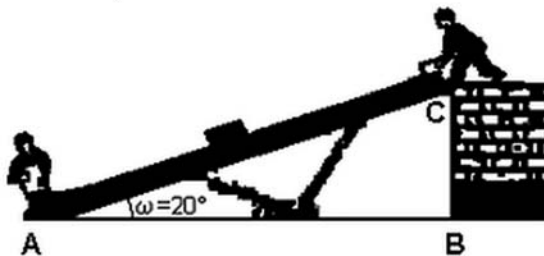
OK a = 2,40 m, b = 2,12 m,  $\beta = 41^\circ 30'$ ,  $\gamma = 90^\circ$

13. Krov dlouhý 6,6 m přesahuje přes okraj zdi 60 cm své délky a s rovinou půdy svírá úhel  $42^\circ$  (viz obrázek). O kolik centimetrů by se snížila výška půdy  $v$ , kdyby tentýž krov přesahoval přes okraj zdi 75 centimetrů své délky? 1644



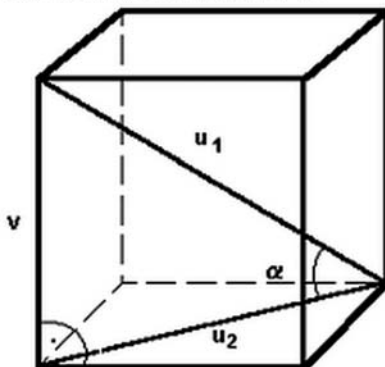
OK 22,8 cm

14. Stavební materiál byl na stavbu dopravován transportérem dlouhým 10 m pod úhlem  $\omega = 20^\circ$ . Do jaké výšky  $v$  metrech byl tento materiál dopravován? (Obloukovité zakončení transportéru neber v úvahu.) 1627



OK 3,4 m

15. Tělesová úhlopříčka  $u_1$  kvádrů je dlouhá 9,7 dm a s podstavovou úhlopříčkou  $u_2$  svírá úhel  $\alpha = 42^\circ$ . Vypočti výšku kvádrů  $v$ . 1638

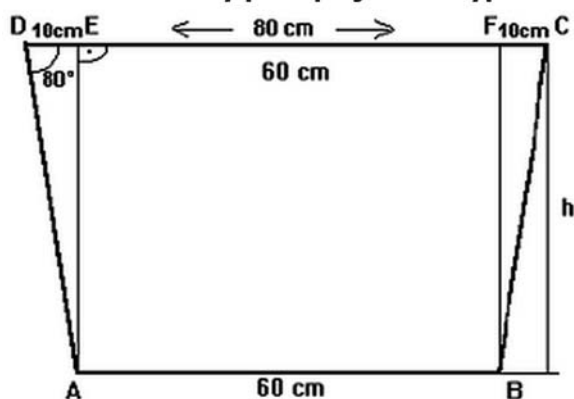


OK 6,5 dm

16. V pravoúhlém trojúhelníku EFG jsou dány délky odvěsen  $|FG| = e = 10,4$  m a  $|EG| = f = 6,8$  m. Vypočti velikosti jeho ostrých úhlů při vrcholech E a F. 1633

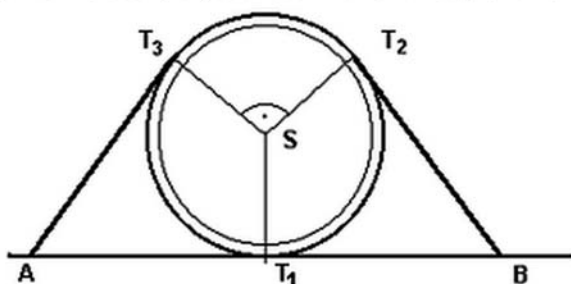
OK Úhel při vrcholu E má velikost  $56^\circ 49'$  a úhel při vrcholu F má velikost  $33^\circ 11'$

17. Profil příkopu na obrázku je rovnoramenný lichoběžník se základnami dlouhými 60 cm a 80 cm. Sklon boční stěny příkopu je  $80^\circ$ . Vypočti hloubku příkopu.



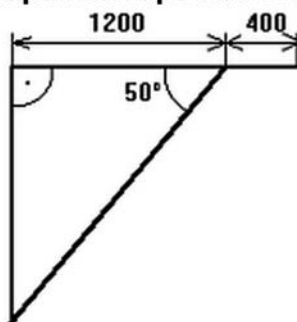
OK 56,7 cm

18. Stabilitu roury na vodorovné podložce zabezpečuje ocelové lano, které rouru obepíná. Lano je ukotveno v bodech A, B. Platí  $|AT_1| = |BT_1|$ ;  $T_1$  je bod dotyku roury s podložkou. Vypočítejte délku lana od bodu A do bodu B, jestliže vnější průměr roury se rovná 44 cm a velikost úhlu  $T_3ST_2$  je rovna  $90^\circ$ ; S je střed kruhového průřezu rourou, který je kolmý na osu roury.



OK 140,8 cm

19. Rampu u skladu zboží drží 4 stejné ocelové vzpěry, jedna z nich je nakreslena na obrázku. Kolik metrů ocelové trubky čtvercového průřezu se spotřebovalo k výrobě všech čtyř vzpěr, jestliže se jejich spotřeba úpravou ve svárech zvýšila o 7 procent? (Pozn.: Do konstrukce traverzy je zapotřebí započítat i svislou část - viz obrázek)



OK 21 m

20. V rovnoramenném trojúhelníku XYZ je dána délka jeho základny  $|XY| = z = 9$  cm a velikost úhlu  $|\sphericalangle XYZ| = 50^\circ 10'$ . Vypočti obsah tohoto trojúhelníku.

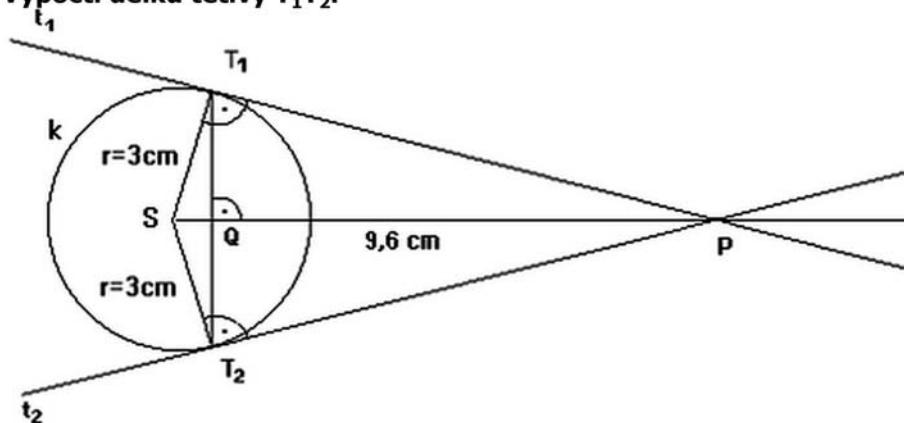
OK 24,3 cm<sup>2</sup>

21. V kosočtverci ABCD je úhlopříčka  $|AC| = e = 24$  cm a  $|\sphericalangle SAB| = \varepsilon = 28^\circ$ ; S je průsečík úhlopříček AC a BD. Vypočítejte obvod kosočtverce ABCD.

OK 54 cm

22. Na obrázku jsou naryšovány tečny  $t_1$  a  $t_2$  z bodu  $P$  ke kružnici  $k(S; 3\text{ cm})$ . Platí:  $|PS| = 9,6\text{ cm}$ .  
Vypočti délku tětivy  $T_1T_2$ .



1641



OK 5,7 cm



 **Obsah**

- |   |   |
|---|---|
|  1. Řešení pravoúhlého trojúhelníka                      | 2 |
|  2. Řešení pravoúhlého trojúhelníku - procvičovací úlohy | 4 |