

Podobnost trojúhelníků

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na www.jarjurek.cz.

1. Podobnost trojúhelníků

Definice:

Trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ jsou podobné, jestliže pro jejich strany platí:

$$a' = k \cdot a$$

$$b' = k \cdot b$$

$$c' = k \cdot c$$

Číslo k nazýváme koeficientem (poměrem) podobnosti. Koeficient podobnosti je vždy větší než nula.

Je-li $k > 1$, hovoříme o tzv. **zvětšení**, je-li $0 < k < 1$, hovoříme o tzv. **zmenšení**.

Pozn.: Pokud by bylo $k = 1$, nastala by shodnost. Shodnost je tedy zvláštní případ podobnosti.

Věty o podobnosti trojúhelníků:

Věta sss:

Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže jejich poměry každých dvou odpovídajících si stran jsou shodné.

Věta sus:

Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují v jednom úhlu a poměry odpovídajících si stran, které svírají uvedený úhel, jsou shodné.

Věta uu:

Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují ve dvou odpovídajících si úhlech.

Poznámka:

Pro podobné útvary tedy platí:

- odpovídající si úsečky jsou ve stejném poměru
- odpovídající si úhly jsou shodné

Důkazové úlohy:

Příklad 1:

Věta: Jestliže dva libovolné trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ jsou rovnostranné, pak jsou podobné.

Důkaz:

Vnitřní úhly při vrcholech A , B , C mají velikost 60° ... vyplývá z vlastností rovnostranného trojúhelníka

Vnitřní úhly při vrcholech A' , B' , C' mají velikost 60° ... vyplývá z vlastností rovnostranného trojúhelníka

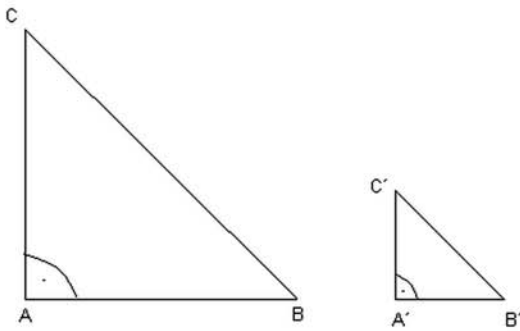
Vnitřní úhel při vrcholu A je tedy shodný s vnitřním úhlem při vrcholu A' , vnitřní úhel při vrcholu B je shodný s vnitřním úhlem při vrcholu B' . Oba trojúhelníky jsou tedy podobné podle věty uu.

CBD

Příklad 2:

Věta: Jestliže dva pravoúhlé trojúhelníky jsou rovnoramenné, pak jsou podobné.

Důkaz:



Vnitřní úhly při vrcholech A, A' mají velikost 90° a jsou tedy shodné (vyplývá z předpokladu)

$|AB| = |AC|$... vyplývá z předpokladu a z vlastností rovnoramenného trojúhelníka

$|A'B'| = |A'C'|$... vyplývá z předpokladu a z vlastností rovnoramenného trojúhelníka

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = k$$

Trojúhelníky jsou tedy podobné podle věty sus. CBD

Výpočtové úlohy:

Příklad 3:

Les tvaru trojúhelníka ABC je na mapě v měřítku $1 : 50\,000$ zakreslen jako trojúhelník A'B'C' o stranách délek 3,2 cm, 4,8 cm 5,4 cm. Určete skutečné velikosti stran trojúhelníka.

Řešení:

$$|A'B'| = 3,2 \text{ cm}$$

$$|B'C'| = 4,8 \text{ cm}$$

$$|A'C'| = 5,4 \text{ cm}$$

$$k = 1 : 50\,000$$

$$|AB| = ? \text{ [cm]}$$

$$|BC| = ? \text{ [cm]}$$

$$|AC| = ? \text{ [cm]}$$

$$|AB| = (1/k) \cdot |A'B'|$$

$$|AB| = 3,2 \cdot 50\,000 \text{ cm} = 160\,000 \text{ cm} = 1,6 \text{ km}$$

$$|BC| = 4,8 \cdot 50\,000 \text{ cm} = 240\,000 \text{ cm} = 2,4 \text{ km}$$

$$|AC| = 5,4 \cdot 50\,000 \text{ cm} = 270\,000 \text{ cm} = 2,7 \text{ km}$$

Rozměry lesa jsou 1,6 km, 2,4 km, 2,7 km.



2. Podobnost trojúhelníků - procvičovací příklady

1. **Přímá cesta rovnoměrně stoupá na každých dvou metrech o 46 cm. O kolik metrů stoupne cesta na vzdálenosti 270 metrů?** 2053
OK: 62,1 m
2. **Školní budova vrhá na rovinu dvora stín 16 m dlouhý a v téže době vrhá svislá tyč stín 132 cm dlouhý. Určete výšku budovy.** 2054
OK: 12,12 m
3. **Rozhodněte, zda trojúhelníky ABC, A'B'C' jsou podobné, je-li zadáno:** 2051
 $a = 5/3$
 $b = 11/6$
 vnitřní úhel při vrcholu C je 70°
 $a' = 5/2$
 $b' = 11/4$
 vnitřní úhel při vrcholu C' je 70°
 OK: Jsou podobné
4. **Z vrcholu pahorku 80 metrů vysokého je vidět na vodorovné rovině za sebou dvě tyče pod hloubkovými úhly 62° a 42° . Určete vzdálenost obou tyčí.** 2048
OK: 46,3 m
5. **Trojúhelníkové pole o rozměrech 162,5 m, 117,5 m a 180 m je na mapě zakresleno jako trojúhelník se stranami 6,5 mm, 4,7 mm, 7,2 mm. Určete měřítko mapy.** 2055
OK: 1 : 25 000
6. **Nepřátelská pozorovatelná je vzdálena 4 200 metrů a je položena o 180 metrů výše než postavení dělostřelecké baterie. Jak daleko lze umístit dělo za krytem, aby nebylo vidět z nepřátelské pozorovatelné? Kryt před baterií je 15 metrů vysoký.** 2052
OK: 350 m
7. **Jsou dány dva podobné trojúhelníky, jejichž koeficient podobnosti je k. Určete, v jakém poměru jsou jejich obsahy.** 2046
OK: k^2
8. **Trojúhelníky EFG a MNK jsou podobné a platí, že:** 2043
 $|EF| = 5 \text{ cm}$
 $|MN| = 7 \text{ cm}$
 $|EG| = 6 \text{ cm}$
 $|NK| = 4 \text{ cm}$
Vypočtěte délku strany $|MK|$.
 OK: 8,4 cm
9. **Jsou dány trojúhelníky ABC a A'B'C' a platí:** 2042
 $a = 6$ $b = 8$ $c = 9$ $a' = 5$ $b' = 6 \frac{2}{3}$ $c' = 7 \frac{1}{2}$
Rozhodněte, zda jsou trojúhelníky podobné.
 OK: Jsou podobné.
10. **Trojúhelníky EFG a MNK jsou podobné a platí, že:** 2044
 $|EF| = 5 \text{ cm}$
 $|MN| = 7 \text{ cm}$
 $|EG| = 6 \text{ cm}$
 $|NK| = 4 \text{ cm}$
Vypočtěte délku strany $|FG|$.
 OK: 2,86 cm
11. **Dva rovnoramenné trojúhelníky mají základny c, c' a výšky v, v'. Dokažte, že jsou trojúhelníky podobné, platí-li $c : v = c' : v'$** 2049
OK:

12. Jsou dány dva podobné trojúhelníky, jejichž koeficient podobnosti je k . Určete, v jakém poměru jsou jejich obvody. 2047

OK

13. Dokažte, že trojúhelník ABC a trojúhelník $A'B'C$, který má vrcholy ve středech stran trojúhelníka ABC , jsou trojúhelníky podobné. 2045

OK

14. Rozhodněte, zda trojúhelníky ABC , $A'B'C'$ jsou podobné, je-li zadáno: 2050

$a = 2,5$

$b = 7$

vnitřní úhel při vrcholu C je 90°

$a' = 5$

$b' = 13,9$

vnitřní úhel při vrcholu C' je 90°

OK

 **Obsah**

- | | |
|---|---|
|  1. Podobnost trojúhelníků | 2 |
|  2. Podobnost trojúhelníků - procvičovací příklady | 3 |