Variace

1

Množiny a intervaly

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK
Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na www.jarjurek.cz.

1. Číselné obory

Přirozená čísla

- označujeme N Potřebujeme-li přidat nulu, pak označujeme N_0.
- jedná se o čísla 1, 2, 3, 4, ... Nejmenší přirozené číslo je 1.

Celá čísla

- označujeme Z (Opět můžeme vytvářet např. Z^+, Z^-, či Z_0^+.)
- tento číselný obor dostaneme, když k přirozeným číslům přidáme čísla opačná a nulu

Racionální čísla

- označujeme Q (Opět můžeme vytvářet např. Q^+, Q^-, či Q_0^+.)
- jsou to všechna čísla, která můžeme vyjádřit zlomkem s celočíselným čitatelem i jmenovatelem.

Iracionální čísla

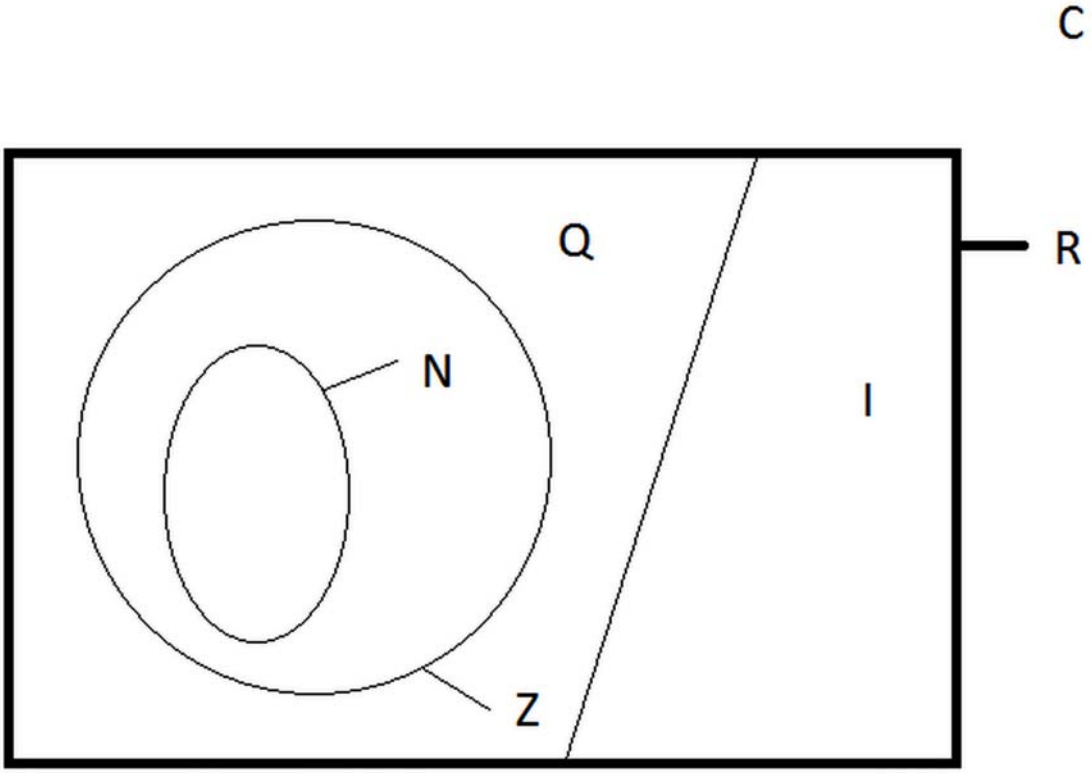
- nemají své označení, protože ho vlastně nepotřebujeme (v obrázku níže jsme pro názornost použili označení I)
- patří sem např. čísla π, √2, √3, apod.

Reálná čísla

- označujeme je R (Opět můžeme vytvářet např. R^+, R^-, či R_0^+.)
- jsou to všechna čísla, která můžeme zobrazit na číselné ose

Komplexní čísla

- označujeme je C
- jsou to čísla, která už nelze zobrazit na jedné číselné ose, ale potřebujeme k tomu dvě na sebe kolmé osy (podobně jako pro zobrazení bodů v rovině). Rovinu, v níž čísla zobrazujeme, nazýváme Gaussovou rovinou.



2. Množiny a operace s nimi

Co je množina

Množinovými pojmy vyjadřujeme matematické úvahy o skupinách (souhrnech, souborech, oborech) osob, věcí i abstarktních věcí. Společné vlastnosti skupin, oborů, útvarů, souhrnů vyjadřujeme v matematice pomocí základních množinových pojmů:

Skupina, organizace, obor, útvar - **množina**

Část skupiny, dílčí organizace, podobor, část útvaru - **podmnožina**

Být členem organizace, patří do skupiny, náležet do oboru, patřit do útvaru - **být prvkem množiny**

Skupina bez členů, útvar neobsahující žádný bod, prázdný obor - **prázdná množina**

Množinu lze zadat:

- výčtem prvků - př. $A = \{1; 3; 5; 7\}$
- pomocí charakteristické vlastnosti - př. $B = \{x \in N; x \leq 8\}$

Inkluze a rovnost množin:

- inkluzi množiny A v množině B zapisujeme $A \subset B$ (čteme též "Množina A je podmnožinou množin B")
- rovnost množin zapisujeme $A = B$

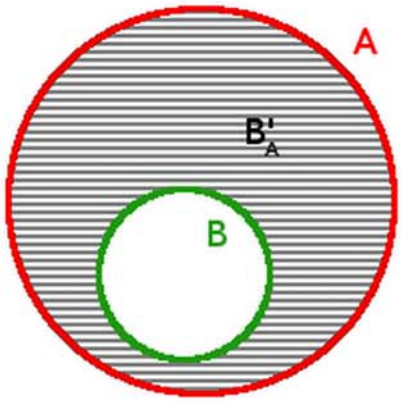
Každá množina je i podmnožinou sama sebe.

Každá prázdná množina je podmnožinou každé množiny.

Pozn.: Platí, že $A \subset B$, jestliže pro každý prvek množiny A platí, že je zároveň i prvkem množiny B.

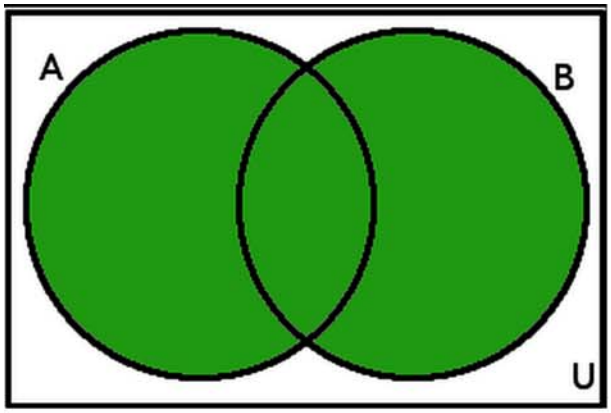
Platí, že $A = B$, jestliže pro každý prvek množiny A platí, že je i prvkem množiny B a zároveň pro každý prvek množiny B platí, že je i prvkem množiny A.

Doplněk množiny:



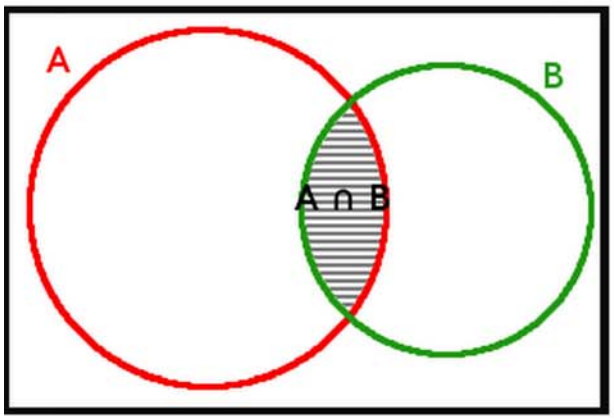
Jsou-li A, B dvě množiny, pro které platí $B \subset U$, pak existuje množina všech prvků množiny A obsahující prvky, které nepatří do B. Tuto množinu nazveme **doplňkem množiny B v množině A** (označujeme B_A').

Sjednocení množin:



Jsou dány množiny A, B, přičemž A ≠ B. Množinu všech prvků, které obsahují prvky aspoň jedné z množin A, B nazveme **sjednocení množin A, B**. Zapisujeme A ∪ B.

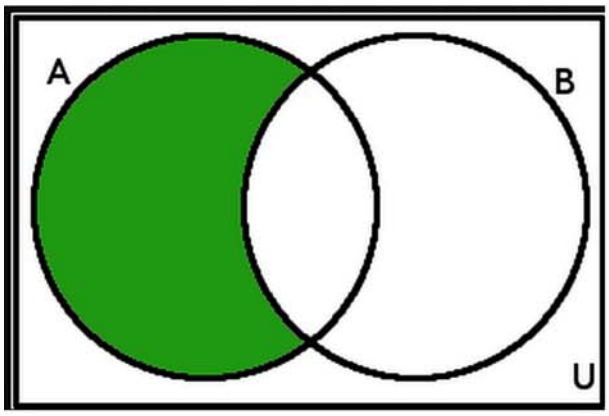
Průnik množin:



Množinu všech prvků, které patří do množiny A a zároveň i do množiny B, nazýváme **průnik množin A, B**. Zapisujeme A ∩ B.

Množiny, které nemají společné prvky, nazýváme **disjunktní množiny**.

Rozdíl množin:



Jsou dány množiny A, B, přičemž A ≠ B. Množinu všech prvků, které patří do množiny A, ale nepatří do množiny B, nazveme rozdíl množin.

Zapisujeme A \ B.

Množinové operace často znázorňujeme Vennovými diagramy.

3. Množiny - procvičovací úlohy

1. **Jsou dány množiny C = {-4; -3; -2; 0; 2; 3}, D = {x ∈ N; x ≤ 3}. Určete množinu A = D \ C.** 4711

OK A = {1}

2. **Jsou dány množiny C = {-4; -3; -2; 0; 2; 3}, D = {x ∈ N; x ≤ 3}. Určete množinu A = C ∩ D.** 4708

OK A = {2; 3}

3. **Jsou dány množiny X = {x ∈ N; x ≤ 6}, Y = {x ∈ Z; -2 ≤ x < 4}. Určete X ∩ Y.** 4754

OK X ∩ Y = {1; 2; 3}

4. **Určete všechny množiny X, pro něž je A ∪ X = B, je-li A = { }, B = {2; 8}** 4732

OK X_1 = {2; 8}

5. **Danou množinu zapište výčtem prvků nebo pomocí intervalů:**
A = {x ∈ R; |x| ≥ 4} 4705

OK A = (-∞; -4> ∪ <4; +∞)

6. **Jsou dány množiny C = {-4; -3; -2; 0; 2; 3}, D = {x ∈ N; x ≤ 3}. Platí C ⊂ D?** 4706

OK Ne

7. **Jsou dány množiny X = {x ∈ N; x ≤ 5}, Y = {x ∈ Z; -10 < x < 6}. Určete X ∩ Y.** 4746

OK X ∩ Y = {1; 2; 3; 4; 5}

8. **Jsou dány množiny X = {x ∈ N; x ≤ 6}, Y = {x ∈ Z; -2 ≤ x < 4}. Určete X \ Y.** 4756

OK X \ Y = {4; 5; 6}

9. **Danou množinu zapište výčtem prvků nebo pomocí intervalů:**
A = {x ∈ N; x | 10}
Pozn.: Zápis x | 10 čteme "x dělí 10" a znamená to, že musí platit, že x je dělitelem čísla 10. 4702

OK A = {1; 2; 5; 10}

10. **Jsou dány množiny A = {x ∈ Z; x^2 < 10}, B = {x ∈ N; 3 | x ∧ |x| < 13}, C = {1; 2; 3}. Určete výčtem prvků A ∩ B.**
Pozn.: 3 | x znamená, že číslo x lze dělit třemi. 4735

OK A ∩ B = {3}

11. **Určete všechny množiny X, pro něž je A ∪ X = B, je-li A = Z, B = N_0.** 4733

OK Nemá řešení.

12. **Jsou dány množiny C = {-4; -3; -2; 0; 2; 3}, D = {x ∈ N; x ≤ 3}. Určete množinu A = C \ D.** 4710

OK A = {-4; -3; -2; 0}

13. **Danou množinu zapište výčtem prvků nebo pomocí intervalů:**
A = {x ∈ N; x ≤ 5} 4703

OK A = {1; 2; 3; 4; 5}

14. **Jsou dány množiny A = {x ∈ Z; x^2 < 10}, B = {x ∈ N; 3 | x ∧ |x| < 13}, C = {1; 2; 3}. Určete výčtem prvků C_A'.**
Pozn.: 3 | x znamená, že číslo x lze dělit třemi. 4738

OK C_A' = {-3; -2; -1; 0}

15. **Jsou dány množiny X = {x ∈ N; x ≤ 5}, Y = {x ∈ Z; -10 < x < 6}. Určete Y \ X.** 4748

OK Y \ X = {-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0}

16. **Jsou dány množiny A = {x ∈ Z; x² < 10}, B = {x ∈ N; 3 | x ∧ |x| < 13}, C = {1; 2; 3}. Určete výčtem prvků B \ A.**
Pozn.: 3 | x znamená, že číslo x lze dělit třemi. 4737

OK B \ A = {6; 9; 12}

17. **Vypiš všechny podmnožiny množiny L = {-3; 2/7; √5}.** 4734

OK $L_1 = \{\}$, $L_2 = \{-3\}$, $L_3 = \{2/7\}$, $L_4 = \{\sqrt{5}\}$, $L_5 = \{-3; 2/7\}$, $L_6 = \{-3; \sqrt{5}\}$, $L_7 = \{2/7; \sqrt{5}\}$, $L_8 = \{-3; 2/7; \sqrt{5}\}$,

18. **Jsou dány množiny C = {-4; -3; -2; 0; 2; 3}, D = {x ∈ N; x ≤ 3}. Platí D ⊂ C?** 4707

OK Ne

19. **Určete všechny množiny X, pro něž je A ∪ X = B, je-li A = {7; 8; 9}, B = {x ∈ N_0; 5 ≤ x < 10}** 4731

OK $X_1 = \{5; 6\}$, $X_2 = \{5; 6; 7; 8; 9\}$, $X_3 = \{5; 6; 7\}$, $X_4 = \{5; 6; 8\}$, $X_5 = \{5; 6; 9\}$, $X_6 = \{5; 6; 7; 8\}$, $X_7 = \{5; 6; 7; 9\}$, $X_8 = \{5; 6; 8; 9\}$

20. **Danou množinu zapište výčtem prvků nebo pomocí intervalů:**
A = {x ∈ Z; -2 < x ≤ 2} 4701

OK A = {-1; 0; 1; 2}

21. **Jsou dány množiny X = {x ∈ N; x ≤ 6}, Y = {x ∈ Z; -2 ≤ x < 4}. Určete X ∪ Y.** 4755

OK X ∪ Y = {-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6}

22. **Jsou dány množiny X = {x ∈ N; x ≤ 5}, Y = {x ∈ Z; -10 < x < 6}. Určete X ∪ Y.** 4747

OK X ∪ Y = {-9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5}

23. **Jsou dány množiny A = {x ∈ Z; x² < 10}, B = {x ∈ N; 3 | x ∧ |x| < 13}, C = {1; 2; 3}. Určete výčtem prvků A ∪ B.**
Pozn.: 3 | x znamená, že číslo x lze dělit třemi. 4736

OK A ∪ B = {-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 6; 12}

24. **Jsou dány množiny C = {-4; -3; -2; 0; 2; 3}, D = {x ∈ N; x ≤ 3}. Zapište 5 podmnožin množiny D.** 4712

OK např. $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{2\}$, $A_3 = \{3\}$, $A_4 = \{\}$, $A_5 = \{1; 2\}$

25. **Danou množinu zapište výčtem prvků nebo pomocí intervalů:**
A = {x ∈ R; |x| < 5} 4704

OK A = (-5; 5)

26. **Určete všechny množiny X, pro něž je A ∪ X = B, je-li A = {x ∈ N; x ≤ 2}, B = {x ∈ N_0; x < 4}** 4730

OK $X_1 = \{0; 3\}$, $X_2 = \{0; 1; 2; 3\}$, $X_3 = \{0; 1; 3\}$, $X_4 = \{0; 2; 3\}$

27. **Jsou dány množiny C = {-4; -3; -2; 0; 2; 3}, D = {x ∈ N; x ≤ 3}. Určete množinu A = C ∪ D.** 4709

OK A = {-4; -3; -2; 0; 1; 2; 3}

4. Intervaly

Intervaly, jejich zápis a znázornění

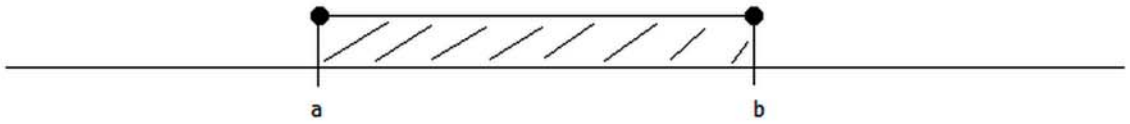
Užití intervalů je široké a setkáme se s nimi nejen při řešení nerovnic. Interval je vlastně jakési rozmezí čísel.

Rozdělení intervalů:

1. Uzavřený interval $a \le x \le b$

(*x* je menší nebo rovno *b* a zároveň větší nebo rovno než *a*)

- zapisujeme též množinově: $x \in \langle a; b \rangle$



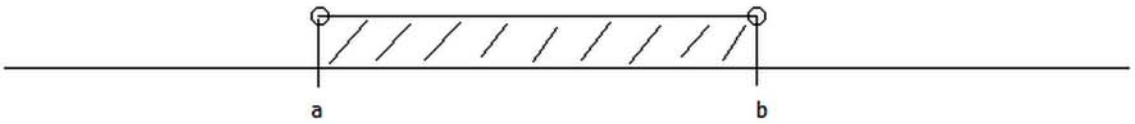
Grafickým znázorněním tohoto intervalu je úsečka se svými krajními body.

2. Otevřený interval

$a < x < b$

(*x* je menší než *b* a zároveň větší než *a*)

- zapisujeme též množinově: $x \in (a; b)$

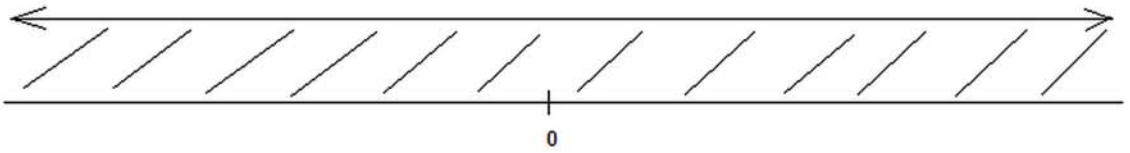


Grafickým znázorněním je úsečka bez krajních bodů.

Poznámka: Zvláštním případem otevřeného intervalu je celá množina reálných čísel.

Grafickým znázorněním je přímka.

$x \in (-\infty; +\infty)$ nebo jinak $x \in R$

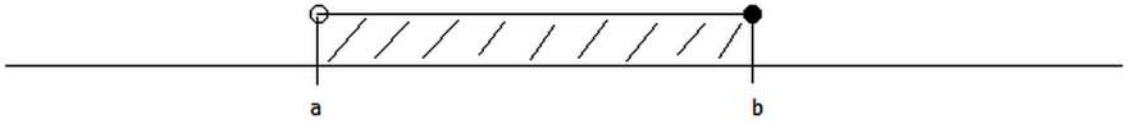


3. Polootevřený (polouzavřený) interval

$a < x \leq b$

(*x* je menší nebo rovno *b* a zároveň větší než *a*)

- zapisujeme též množinově: $x \in (a; b>$

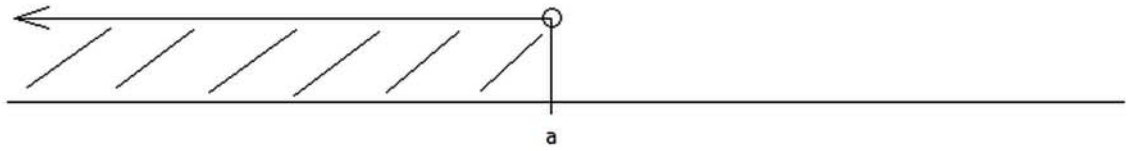


Grafickým znázorněním je úsečka s jedním krajním bodem. Takovýto interval někdy také nazýváme **zprava uzavřený interval**.

Pozn.: Analogicky bychom mohli definovat **zleva uzavřený interval**.

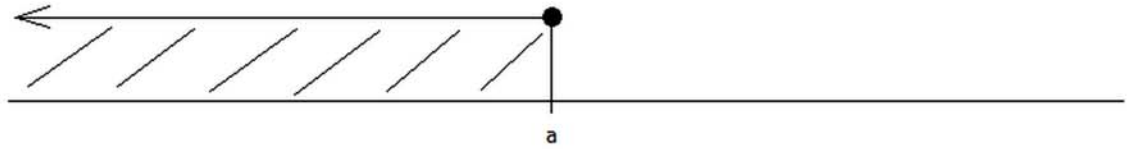
4. Další typy intervalů

$x < a$ $x \in (-\infty; a)$



Analogicky by byl interval pro $x > a$

$x \leq a$ $x \in (-\infty; a>$



Opět analogicky by vypadal interval pro $x \geq a$

Průnik a sjednocení intervalů

S průnikem a sjednocením intervalů se setkáme v praxi například při řešení soustav nerovnic, ale i u některých funkcí - například u funkcí s absolutní hodnotou.

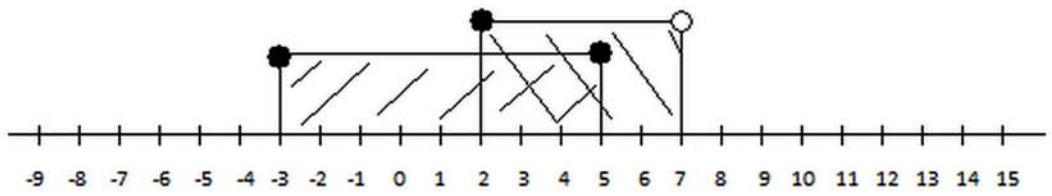
Průnik dvou intervalů obsahuje tu část číselné osy, jejíž obsah patří do obou intervalů současně.

Příklad 1:

Určete průnik a sjednocení intervalů

$A = \langle -3;5\rangle, B = <2;7)$

Řešení:

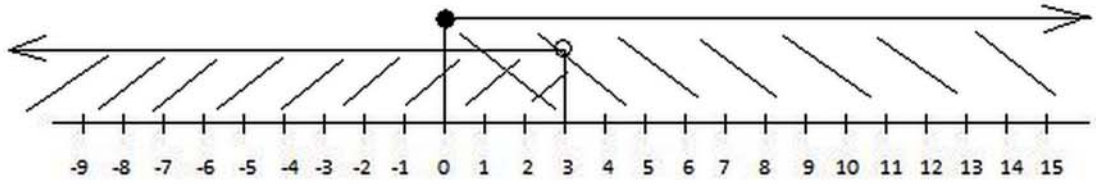


Při průniku hledáme to, co je oběma intervalům společné, tedy řešením je uzavřený interval $A \cap B = \langle 2;5\rangle$ Do sjednocení patří to, co je aspoň v jednom z intervalů, tedy řešením je $A \cup B = <-3;7)$.

Příklad 2:

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-∞; 3) a B = <0; +∞)

Řešení:

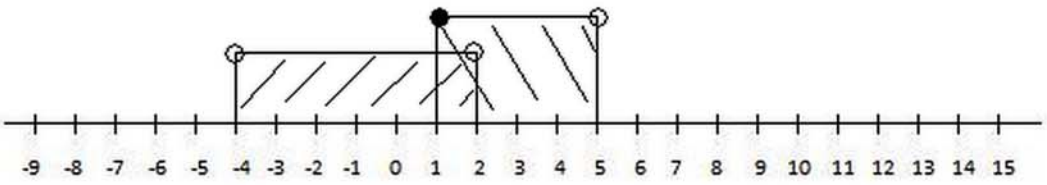


Společnou částí (průnikem) je v tomto případě zleva uzavřený interval <0; 3). Sjednocením je to, co patří aspoň do jednoho z intervalů, a to (-∞; +∞).

Příklad 3:

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-4; 2) a B = <1; 5)

Řešení:

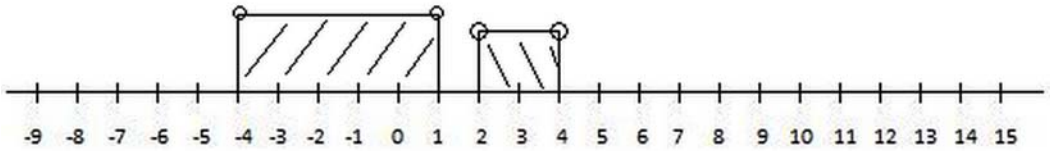


Průnikem je A ∩ B = <1; 2). Při sjednocení hledáme to, co patří alespoň do jednoho z intervalů. Řešením je tedy otevřený interval A ∪ B = (-4; 5).

Příklad 4:

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-4; 1) a B = (2; 4).

Řešení:

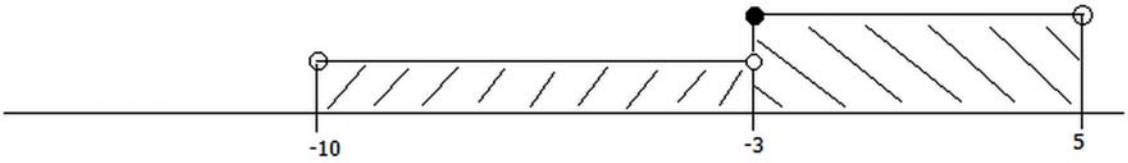


Společné prvky neexistují, proto průnikem je prázdná množina. Zapisujeme A ∩ B = { }. Sjednocením je A ∪ B = (-4; 1) ∪ (2; 4).

Příklad 5:

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-10; -3), B = <-3; 5).

Řešení:

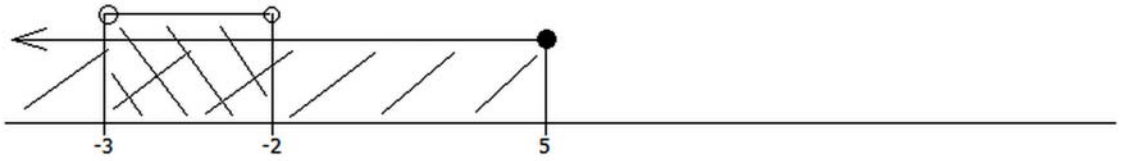


Společný prvek opět neexistuje, proto průnikem je A ∩ B = { }. Sjednocením je A ∪ B = (-10; 5).

Příklad 6:

Určete průnik a sjednocení intervalů A = (-∞; 5>, B = (-3; -2).

Řešení:



Průnikem je A ∩ B =(-3; -2). Sjednocením je A ∪ B = (-∞; 5>.

5. Intervaly - procvičovací úlohy

1. **Jsou dány intervaly A = <-7; 2>, B = <-2; 5), C = <2; +∞). Zapište D = A ∩ B.** 4718

OK D = <-2; 2>

2. **Jsou dány intervaly A = (-4; +∞), B = <-2; 2>, C = (1; 5>. Určete D = A ∪ B.** 4713

OK **D = (-4; +∞)**

3. **Zapište množiny jako intervaly, určete jejich sjednocení:**
A = {x ∈ R; -4 < x < 3}, B = {x ∈ R; 1 < x ≤ 5} 4725

OK A = (-4; 3), B = (1; 5>, A ∪ B = (-4; 5>

4. 4744
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≥ 2}, B = {x ∈ R; |x| < 3}. Určete B \ A.
OK B \ A = (-2; 2)

5. 4752
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≤ 2}, B = {x ∈ R; |x| > 1}. Určete B \ A.
OK B \ A = (-∞; -2) ∪ (2; +∞)

6. 4749
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≤ 2}, B = {x ∈ R; |x| > 1}. Určete A ∩ B.
OK A ∩ B = <-2; 1) ∪ (1; 2>

7. 4759
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x - 2| ≥ 3}, B = {x ∈ R; |x| < 2}. Urči A \ B.
OK A \ B = (-∞; -2> ∪ <5; +∞)

8. 4727
Zapište množiny jako intervaly, určete jejich sjednocení:
A = {x ∈ R; 1 ≤ x < 5}, B = {x ∈ R; -6 < x < 3,4}
OK A = <1; 5), B = (-6; 3,4), A ∪ B = (-6; 5)

9. 4750
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≤ 2}, B = {x ∈ R; |x| > 1}. Určete A ∪ B.
OK A ∪ B = (-∞; +∞)

10. 4740
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| < 2}, B = {x ∈ R; x ≥ -1}. Určete A ∪ B.
OK A ∪ B = (-2; +∞)

11. 4714
Jsou dány intervaly A = (-4; +∞), B = <-2; 2>, C = (1; 5>. Určete D = A ∩ C.
OK **D = (1; 5>**

12. 4742
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≥ 2}, B = {x ∈ R; |x| < 3}. Určete A ∪ B.
OK A ∪ B = (-∞; +∞)

13. 4758
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x - 2| ≥ 3}, B = {x ∈ R; |x| < 2}. Urči A ∪ B.
OK A ∪ B = (-∞; 2) ∪ <5; +∞)

14. 4753
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≤ 2}, B = {x ∈ R; |x| > 1}. Určete A \ B.
OK A \ B = <-1; 1>

15. 4716
Jsou dány intervaly A = (-4; +∞), B = <-2; 2>, C = (1; 5>. Určete D = A ∪ B ∪ C.
OK **D = (-4; +∞)**

16. 4723
Jsou dány intervaly A = <-7; 2>, B = <-2; 5), C = <2; +∞). Zapište D = A \ B.
OK D = <-7; -2)

17. 4760
Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x - 2| ≥ 3}, B = {x ∈ R; |x| < 2}. Urči $B_R´$.
OK $B_R´$ = (-∞; -2> ∪ <2; +∞)

18. 4720
Jsou dány intervaly A = <-7; 2>, B = <-2; 5), C = <2; +∞). Zapište D = (A ∩ B) ∪ C.
OK D = <-2; +∞)

19. 4728
Zapište množiny jako intervaly, určete jejich průnik:
A = {x ∈ R; x < 7}, B = {x ∈ R; x ≤ 3}
OK A = (-∞; 7), B = (-∞; 3>, A ∩ B = (-∞; 3>

20. 4722
Jsou dány intervaly A = <-7; 2>, B = <-2; 5), C = <2; +∞). Zapište D = $A_R´$.
OK D = (-∞; -7) ∪ (2; +∞)

21. 4729
Zapište množiny jako intervaly, určete jejich sjednocení:
A = {x ∈ R; x < 7}, B = {x ∈ R; x ≤ 3}
OK A = (-∞; 7), B = (-∞; 3>, A ∪ B = (-∞; 7)

22. **Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≥ 2}, B = {x ∈ R; |x| < 3}. Určete A \ B.** 4745

OK A \ B = <3; +∞)

23. **Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≤ 2}, B = {x ∈ R; |x| > 1}. Určete $A_R´$.** 4751

OK $A_R´$ = (-∞; -2) ∪ (2; +∞)

24. **Jsou dány intervaly A = <-7; 2>, B = <-2; 5), C = <2; +∞). Zapište D = (A ∩ C) ∪ (B ∩ C).** 4721

OK D = <2; 5)

25. **Jsou dány intervaly A = (-4; +∞), B = <-2; 2>, C = (1; 5>. Určete D = B ∪ C.** 4715

OK **D = <-2; 5>**

26. **Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≥ 2}, B = {x ∈ R; |x| < 3}. Určete A ∩ B.** 4741

OK A ∩ B = (-∞; -2> ∪ <2; 3)

27. **Zapište množiny jako intervaly, určete jejich průnik:**
A = {x ∈ R; -4 < x < 3}, B = {x ∈ R; 1 < x ≤ 5} 4724

OK A = (-4; 3), B = (1; 5>, A ∩ B = (1; 3)

28. **Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| ≥ 2}, B = {x ∈ R; |x| < 3}. Určete $A_R´$.** 4743

OK $A_R´$ = (-2; 2)

29. **Jsou dány intervaly A = <-7; 2>, B = <-2; 5), C = <2; +∞). Zapište D = A ∪ B.** 4719

OK D = <-7; 5)

30. **Jsou dány intervaly A = (-4; +∞), B = <-2; 2>, C = (1; 5>. Určete D = A ∩ B ∩ C.** 4717

OK **D = (1; 2>**

31. **Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x| < 2}, B = {x ∈ R; x ≥ -1}. Určete A ∩ B.** 4739

OK A ∩ B = <-1; 2)

32. **Jsou dány množiny A = {x ∈ R; |x - 2| ≥ 3}, B = {x ∈ R; |x| < 2}. Urči A ∩ B.** 4757

OK A ∩ B = (-2; -1>

33. **Zapište množiny jako intervaly, určete jejich průnik:**
A = {x ∈ R; 1 ≤ x < 5}, B = {x ∈ R; -6 < x < 3,4} 4726

OK A = <1; 5), B = (-6; 3,4), A ∩ B = <1; 3,4)

Obsah

1. Číselné obory 2
2. Množiny a operace s nimi 2
3. Množiny - procvičovací úlohy 5
4. Intervaly 6
5. Intervaly - procvičovací úlohy 9