

Lomené algebraické výrazy

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na www.jarjurek.cz.

1. Lomené algebraické výrazy

Lomený algebraický výraz je takový výraz, který má ve jmenovateli proměnnou.

U každého lomeného výrazu musíme stanovit jeho definiční obor, neboli určit tzv. **podmínku řešitelnosti** (tj. podmínku, při jejímž splnění má výraz smysl).

$$\text{př.: } \frac{2x+3}{5x+1}$$

Jedná se o lomený výraz, který je definován pro všechna reálná čísla, s výjimkou $x = -1/5$ (v tom případě by totiž byl jmenovatel roven nule a nulou nemůžeme dělit).

Zapisujeme tedy: $x \neq -1/5$

Lomené výrazy můžeme rozšiřovat nebo krátit.

Rozšířit lomený výraz znamená vynásobit jeho čitatele i jmenovatele stejným výrazem různým od nuly.

$$\text{př.: } \frac{2x}{x+1} = \frac{2xy}{(x+1)y}$$

$$x \neq -1, y \neq 0$$

Krátit lomený výraz znamená dělit jeho čitatele i jmenovatele stejným výrazem různým od nuly.

$$\text{př.: } \frac{2x^2y^3}{5xy^2} = \frac{2xy}{5}$$

$$x \neq 0, y \neq 0$$

Lomené výrazy též můžeme pomocí rozšíření nebo krácení upravit tak, aby měly **zadaného jmenovatele**, příp. výjimečně používáme i takovou úpravu, aby měly zadaného čitatele.

př.: Zadaný výraz upravte tak, aby měl ve jmenovateli výraz $x^2 - 1$

$$\frac{-3x}{x+1} = \frac{-3x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{-3x^2+3x}{x^2-1}$$

$$x \neq \pm 1$$

Lomený výraz je v **základním tvaru**, jestliže už ho dále nelze krátit.

Lomený výraz je **roven nule**, jestliže je roven nule jeho čítec.

$$\text{př.: } \frac{x-3}{x+2} = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$x \neq -2$$

Lomené výrazy sčítáme tak, že je převedeme na společného jmenovatele a součet číteců takto vzniklých lomených výrazů lomíme společným jmenovatelem.

Pozn.: Analogické je odčítání lomených výrazů

$$\text{př.: } \frac{2x}{3xy^2} + \frac{6}{2x} = \frac{4x+18y^2}{6xy^2}$$

$$x \neq 0, y \neq 0$$

Lomené výrazy násobíme tak, že součin čitateľů lomíme součinem jmenovatelů. Výsledek uvedeme do základního tvaru.

Pozn.: Krátit můžeme i před vynásobením zadaných výrazů, a to tak, že krátíme kteréhokoliv čitatele proti kterémukoliv jmenovateli.

$$\text{př.: } \frac{-2x^2y}{5x^3 \cdot (x+1)} \cdot \frac{3}{x^2} = \frac{-6x^2y}{5x^5 \cdot (x+1)} = \frac{-6y}{5x^3 \cdot (x+1)}$$

$$x \neq 0, x \neq -1$$

Lomený výraz násobíme celistvým výrazem tak, že násobíme tímto celistvým výrazem čitatele výrazu lomeného.

$$\text{př.: } \frac{x-1}{3x} \cdot (x+1) = \frac{x^2-1}{3x}$$

$$x \neq 0$$

Lomený výraz dělíme lomeným výrazem tak, že první lomený výraz násobíme převrácenou hodnotou lomeného výrazu druhého.

$$\text{př.: } \frac{x+1}{3x^2} : \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{3x^2} \cdot \frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{3x^2}$$

$$x \neq 0, x \neq \pm 1$$

Pozn.: Převrácenou hodnotu lomeného výrazu vytvoříme tak, že zaměníme jeho čitatele se jmenovatelem.

$$\text{př.: } \frac{x+1}{x-1} \text{ převrácená hodnota k němu je } \frac{x-1}{x+1}$$

Pozn.: Opačný výraz k lomenému výrazu vytvoříme tak, že před zlomkem změníme znaménko.

$$\text{př.: } \frac{x+1}{x-1} \text{ opačná hodnota k němu je } -\frac{x+1}{x-1} = \frac{x+1}{1-x}$$

Složený lomený výraz je takový výraz, kde základní lomený výraz má v čitateli nebo ve jmenovateli nebo i v čitateli i ve jmenovateli další lomený výraz.

$$\text{př.: } \frac{\frac{2}{x}}{x-5} \text{ nebo } \frac{4x^2}{2y} \text{ nebo } \frac{\frac{5x}{x+1}}{3y^2}$$

Složený lomený výraz řešíme tak, že součin vnějších členů lomíme součinem členů vnitřních.

Pozn.: Vnitřní členy jsou ty, které jsou blíže k hlavní zlomkové čáře; vnější členy jsou od ní naopak dále.

Pozn.: Složený lomený výraz můžeme řešit i tak, že hlavní zlomkovou čáru nahradíme dělením a celý příklad poté řešíme jako podíl dvou lomených výrazů.

$$\frac{x-1}{2x^2} = \frac{(x-1)3x}{2x^2 \cdot (x+1)} = \frac{3 \cdot (x-1)}{2x \cdot (x+1)}$$

př.: $3x$ $x \neq 0, x \neq -1$

2. Lomené výrazy - procvičovací příklady

1. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl: 1072

$$\frac{x-1}{x^2-x} \cdot 3x^2$$

OK $3x; x \neq 0, x \neq 1$ 2. Zjednodušte následující lomený výraz a určete podmínky řešitelnosti: 1088

$$\left(a + \frac{a^2}{a-1}\right) \cdot \left(\frac{a+1}{2a^2-a} \cdot (a+1)\right)$$

OK $\frac{(a+1)^2}{a-1}$
 $a \neq 0, a \neq 1, a \neq 0,5$ 3. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl: 1061

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1+x}{x}\right) \cdot (-2x)$$

OK $2x; x \neq 0$ 4. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl: 1070

$$\frac{8x+7}{8x-7} \cdot (14-16x)$$

OK $-2 \cdot (8x+7); x \neq 7/8$ 5. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl: 1065

$$\frac{p-q}{4p^2-8pq+4q^2} \cdot (4p^2-4pq)$$

OK $p; p \neq q$ 6. Upravte lomený výraz a uveďte podmínky řešitelnosti: 1089

$$\frac{a^2-2a+1}{a^2-1}$$

OK $\frac{a-1}{a+1}; a \neq \pm 1$ 7. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl: 1073

$$\frac{1}{3x^2y} \cdot (-6x^2y^2)$$

OK $-2y; x \neq 0, y \neq 0$

8. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\frac{a-2b+1}{(a-2b)^2-1} \cdot (a-2b-1)$$

OK 1; $a \neq 2b - 1$, $a \neq 2b + 1$

1064

9. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\left(\frac{x}{x+2y} + \frac{x-2y}{x^2-4y^2} \right) \cdot (2y+x)$$

OK $x + 1$; $x \neq \pm 2y$

1058

10. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\left(\frac{1}{r-3s} - \frac{3s+r}{9s^2-r^2} \right) \cdot (3s-r)$$

OK -2 ; $r \neq \pm 3s$

1053

11. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\frac{3+5x}{7x} \cdot 21x^2$$

OK $9x + 15x^2$; $x \neq 0$

1074

12. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\frac{3a+2-b}{4-(3a-b)^2} \cdot (2+b-3a)$$

OK 1; $b \neq 3a - 2$; $b \neq 3a + 2$

1063

13. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\frac{x-y}{x^2-4y^2} \cdot (x-2y)$$

OK $\frac{x-y}{x+2y}$; $x \neq \pm 2y$

1069

14. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\frac{u^3+u^2}{u^2-1} \cdot (u-1)$$

OK u^2 ; $u \neq \pm 1$

1068

15. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\frac{18v}{30v+42} \cdot (5v+7)$$

OK $3v$; $v \neq -7/5$

1067

16. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\frac{m-5n}{3m-2n} \cdot (2n-3m)$$

OK $5n - m$; $n \neq (3/2)m$

1054

17. Zjednodušte lomený výraz a udej podmínky řešitelnosti:

$$\frac{2x^2-4x+2}{x+1} : \frac{6x-6}{1-x^2}$$

OK $-\frac{(x-1)^2}{3}$; $x \neq \pm 1$

1078

18. Určete, pro jaké
- s
- má následující výraz hodnotu rovnu jedné:

$$\frac{2s-10}{s^2-4s+4} : \frac{s-5}{s-2}$$

OK $s = 4$

3019

19. Zjednodušte výraz a udejte podmínky řešitelnosti:

$$\frac{u^2 + 4uv + 4v^2}{(4v^2 - u^2)(2u + 4v)}$$

OK $\frac{1}{2 \cdot (2v - u)}$; $u \neq \pm 2v$

1077

20. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\frac{2}{y+z} \cdot (y^2 - z^2)$$

OK $2 \cdot (y - z)$; $y \neq -z$

1055

21. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\left(\frac{2}{3y-x} - \frac{x+3y}{x^2-9y^2} \right) \cdot (x-3y)$$

OK -3 ; $x \neq \pm 3y$

1057

22. Určete, pro která
- u, v
- má lomený výraz hodnotu rovnu nule:

$$\frac{3uv + 9v - 2u - 6}{3uv - 2u - 9v + 6}$$

OK $u = -3$

3020

23. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

$$\frac{x^2 - y^2}{x+y} \cdot (-1)$$

OK $y - x$; $x \neq -y$

1062

24. Upravte následující výraz na co nejjednodušší tvar a udejte podmínky řešitelnosti:

$$\left(\frac{1}{a+1} - \frac{2a}{a^2-1} \right) : \frac{1}{\frac{1}{a} - 1}$$

OK $\frac{1}{a}$; $a \neq 0$; $a \neq \pm 1$

1081

25. Následující lomený výraz zjednodušte, určete podmínky řešitelnosti a správnost výpočtu ověřte dosazením za
- $x = -2$
- :

$$\frac{3x^2 + 2x - (2x^2 + x)}{x+1}$$

OK Výsledek: x
Podmínky řešitelnosti: $x \neq -1$
Po dosazení: -2

1086

26. Zjednodušte následující lomený výraz a udejte podmínky řešitelnosti:

1085

$$\frac{3uv + 9v - 2u - 6}{3uv - 2u - 9v + 6}$$

OK

$$\frac{u + 3}{u - 3}$$

$$u \neq 3; v \neq 2/3$$

27. Zjednodušte následující výraz, uveďte podmínky řešitelnosti a správnost ověřte dosazením pro
- $s = -2$
- :

1079

$$\frac{2s - 10}{s^2 - 4s + 4} : \frac{s - 5}{s - 2}$$

OK

$$\frac{s}{s - 2}$$

$$s \neq 2, s \neq 5$$

Po dosazení vyjde $s = -0,5$

28. Pro která
- x
- se hodnota následujícího lomeného výrazu rovná nule?

1083

$$\frac{(x - 3) \cdot (2x + 1)}{x}$$

OK

$$x = 3 \text{ nebo } x = -0,5$$

29. Zjednodušte a udejte, kdy má lomený výraz smysl:

1076

$$\frac{a^2 - 4}{2a - 4}$$

OK

$$\frac{a + 2}{2}; a \neq 2$$

30. Zjednodušte a uveďte, kdy má lomený výraz smysl:

1071

$$\frac{6x - 1}{6x + 1} \cdot (12x + 2)$$

OK

$$2 \cdot (6x - 1); x \neq -1/6$$

31. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

1060

$$\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot x^2$$

OK

$$x^2 + x + 1; x \neq 0$$

32. Vypočítejte a uveďte podmínky řešitelnosti:

1084

$$\frac{1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

OK

$$\frac{2}{x^2 - 1}; x \neq \pm 1$$

33. Zjednodušte následující lomený výraz a určete podmínky řešitelnosti:

1087

$$\frac{81a^2 - 1}{27a + 3}$$

OK $\frac{9a-1}{3}; a \neq -\frac{1}{9}$

34. Určete, pro jaké s nemá následující výraz smysl:

3018

$$\frac{2s-10}{s^2-4s+4} : \frac{s-5}{s-2}$$

OK Výraz nemá smysl, pokud $s = 2$ nebo $s = 5$.

35. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

1066

$$\frac{4r^2 + 28rs + 49s^2}{2r + 7s} \cdot (2r - 7s)$$

OK $4r^2 - 49s^2; r \neq -\frac{7}{2}s$

36. Zjednodušte a udejte, kdy má lomený výraz smysl:

1075

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$$

OK $\frac{x-y}{x+y}; x \neq \pm y$

37. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

1056

$$\frac{1-2x}{3x} \cdot (-6x^2)$$

OK $4x^2 - 2x; x \neq 0$

38. Pro jaké x se hodnota níže napsaného lomeného výrazu rovná nule?

1080

$$\frac{x-2}{4x+1}$$

OK $x = 2$

39. Zjednodušte a uveďte, kdy má daný výraz smysl:

1059

$$\left(\frac{xy-y}{y^3x} - \frac{2}{xy^2} \right) \cdot (-xy^2)$$

OK $3 - x; x \neq 0, y \neq 0$

40. Určete hodnotu výrazu pro $a = 0,5$:

1082

$$\left(1 - \frac{2}{a+1} \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{a-1} \right)$$

OK $-1,7$

41. **Zdůvodněte, proč má následující lomený výraz pro každé $u > 3$ kladnou hodnotu:**

3021

$$\frac{3uv + 9v - 2u - 6}{3uv - 2u - 9v + 6}$$

$$\frac{u + 3}{u - 3}$$

OK

$$\frac{u + 3}{u - 3}$$

$$\frac{u + 3}{u - 3}$$

Výsledek má pro každé $u > 3$ hodnotu čitatele i hodnotu jmenovatele kladnou. Podílem dvou kladných čísel je číslo opět kladné. Tím je tedy důkaz proveden.

 **Obsah**

 1. Lomené algebraické výrazy	2
 2. Lomené výrazy - procvičovací příklady	4