

Lineární rovnice s parametrem

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na www.jarjurek.cz.

1. Rovnice s parametrem

Rovnice s parametrem obsahují kromě neznámé (značíme obvykle x , y , z , apod.) ještě další písmenko zvané parametr (značíme obvykle a , b , c , apod.).

Rovnice s parametrem řešíme obdobně jako rovnice klasické, s parametrem pracujeme tak, jako kdyby místo něj bylo zadáno nějaké reálné číslo. V závěru řešení rovnice musíme provést diskusi vzhledem k parametru.

Zkoušku u těchto rovnic, vzhledem k tomu, že budeme používat samé ekvivalentní úpravy, provádět nebudeme.

Ukázkové příklady:

Příklad 1:

Řešte rovnici s reálným parametrem m a neznámou x .

$$m \cdot (x - 1) = x + m$$

Řešení:

Nejprve se snažíme na levou stranu rovnice soustředit všechny členy obsahující neznámou a na pravou stranu všechny členy zbývající. Roznásobíme tedy nejdříve závorku:

$$mx - m = x + m$$

$$mx - x = 2m$$

Na levé straně se snažíme osamostatnit neznámou x . Vytkneme ji tedy před závorku:

$$x \cdot (m - 1) = 2m$$

Celou rovnici nyní dělíme závorkou na levé straně. Vše ale můžeme pouze za podmínky, že

$$m \neq 1$$

$$x = \frac{2m}{m-1}$$

Nyní provedeme diskusi vzhledem k parametru m :

m	1	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$
x	NŘ	$\frac{2m}{m-1}$

Příklad 2:

Řešte rovnici s reálným parametrem m a neznámou y :

$$\frac{3}{m-2} = 5 - y$$

Řešení:

Za podmínky $m \neq 2$ můžeme odstranit zlomek:

$$3 = (5 - y) \cdot (m - 2)$$

Roznásobíme závorky:

$$3 = 5m - 10 - my + 2y$$

Na levou stranu soustředíme členy obsahující neznámou, na pravou všechny zbývající:

$$my - 2y = 5m - 13$$

Na levé straně rovnice vytkneme y :

$$y \cdot (m - 2) = 5m - 13$$

Celou rovnici vydělíme závorkou na levé straně; vzhledem k platnosti podmínky uvedené v prvním kroku, to můžeme provést snadno:

$$y = \frac{5m - 13}{m - 2}$$

Provedeme diskusi vzhledem k parametru:

m	2	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$
y	NS	$\frac{5m - 13}{m - 2}$

Příklad 3:

Řešte rovnici s reálným parametrem c a s neznámou x :

$$(x + 3) \cdot (x - c) = x^2 + 3c - 18$$

Řešení:

$$x^2 - cx + 3x - 3c = x^2 + 3c - 18$$

$$3x - cx = 6c - 18$$

$$x \cdot (3 - c) = 6 \cdot (c - 3)$$

Celou rovnici vydělíme $(3 - c)$, avšak za předpokladu, že stanovíme podmínku $c \neq 3$:

$$x = -6$$

Provedeme diskusi vzhledem k parametru:

c	3	$\mathbb{R} \setminus \{3\}$
x	R	-6

Příklad 4:

Řešte rovnici s reálným parametrem m a neznámou y .

$$\frac{y}{2m} + \frac{2y}{3m} - \frac{3y}{4m} = \frac{5(1 - 2y)}{24}$$

Řešení:

Uvážíme-li $m \neq 0$, pak můžeme odstranit zlomky:

$$12y + 16y - 18y = 5m - 10my$$

$$10y + 10my = 5m$$

Celou rovnici vydělíme číslem 5:

$$2y + 2my = m$$

$$2y \cdot (1 + m) = m$$

Uvážíme-li $m \neq -1$, pak celou rovnici můžeme závorkou vydělit:

$$y = \frac{m}{2 \cdot (1+m)}$$

Provedeme diskuzi vzhledem k parametru:

m	$-\frac{1}{2}$	0	$\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$
y	NŘ	NS	$\frac{1}{2m+2}$



2. Lineární rovnice s parametrem - procvičovací úlohy

1. Řešte rovnici s reálným parametrem p a proveďte úplnou diskuzi řešení:

2588

$$p+1 = \frac{p^2-1}{x}$$

OK

p	-1	$\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
x	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$p-1$

2. Řešte rovnici s reálným parametrem a a neznámou x :

2582

$$\frac{4}{x-a} + 2 = \frac{a}{a-x}$$

OK

a	-4	$\mathbb{R} \setminus \{-4\}$
x	NŘ	$\frac{a-4}{2}$

3. Řešte rovnici s reálným parametrem a a proveďte úplnou diskuzi řešení:
 $x \cdot (a+2) + a \cdot (x-2) = x+a$

2584

OK

a	-0,5	$\mathbb{R} \setminus \{-0,5\}$
x	NŘ	$\frac{3a}{2a+1}$

4. Řešte v \mathbb{R} rovnici s reálným parametrem a :

2592

$$x+1 - \frac{2x+a+1}{a} = \frac{a-x}{a}$$

OK

a	0	1	$\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$
x	NS	NŘ	$\frac{a+1}{a-1}$

5. Řešte v R rovnici s reálným parametrem b:

$$\frac{z+b}{2} - \frac{2}{z+b} = \frac{z-b}{2}$$

2593

OK

b	0	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
z	NŘ	$\frac{2-b^2}{b}$

6. Řešte v R rovnici s reálným parametrem a:

$$a - \frac{1}{a} = \frac{a^2 - 1}{x}$$

2595

OK

a	0	1	-1	$\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$
x	NS	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	a

7. Řešte rovnici s reálným parametrem a a neznámou x:

$$a \cdot \left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x} + 1 \right) = \frac{x^2 - a^2}{x} + a$$

2583

OK

Rovnice nemá smysl.

8. Řešte rovnici s reálným parametrem t a proveďte úplnou diskusi řešení:
 $t \cdot (x - 1) = x + t$

2587

OK

t	1	$\mathbb{R} \setminus \{1\}$
x	NŘ	$\frac{2t}{t-1}$

9. Řešte v R rovnici s reálným parametrem a a neznámou x:

$$\frac{3}{x-a} - \frac{2}{x+a} = \frac{3x-7a}{x^2-a^2}$$

2596

OK

a	0	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
x	NS	6a

10. Řešte v R rovnici s reálným parametrem b:

$$\frac{z-b}{1-b} = \frac{z+b}{1+b}$$

2591

OK

b	$\{-1; 1\}$	0	$\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$
z	NS	$z \in \mathbb{R}$	1

11. Řešte rovnici a proveďte úplnou diskuzi řešení:
 $(4 + x) \cdot (t^2 + x) - (t^2 - x) \cdot (4 - x) = 8tx + 2t^2 - 8$

2585

OK	t	2	$R \setminus \{2\}$
	x	NMŘ	$\frac{t+2}{t-2}$

12. Určete reálnou hodnotu parametru a tak, aby rovnice s reálnou neznámou x měla kladný kořen:
 $6a - ax + 2x = 15$

2589

OK $a \in (-\infty; 2) \cup (2,5; +\infty)$

13. Řešte rovnici s reálným parametrem p a proveďte úplnou diskuzi řešení:
 $4 \cdot (x - p) = p^2 \cdot (x - 1)$

2586

OK	p	$\{-2; 2\}$	$R \setminus \{-2; 2\}$
	x	NŘ	$\frac{p \cdot (4-p)}{4-p^2}$

14. V R řešte rovnici s reálným parametrem a :

2590

$$x - \frac{2}{a^3} = \frac{1}{a^2} (4x + 1)$$

OK	a	-2	0	2	$R \setminus \{-2; 0; 2\}$
	x	NMŘ	NS	NŘ	$\frac{1}{a \cdot (a-2)}$

15. Řešte rovnici s reálným parametrem a a neznámou x :

2579

$$x + 1 - \frac{2x + a + 1}{a} = \frac{a - x}{a}$$

OK	a	0	1	$R \setminus \{0; 1\}$
	x	NS	NŘ	$\frac{a+1}{a-1}$

16. Určete reálnou hodnotu parametru a tak, aby rovnice s reálnou neznámou x měla kladný kořen:

2578

$$\frac{x-2}{3} - \frac{ax+1}{2} = \frac{a-1}{2}$$

OK $a \in \left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$

17. Řešte v \mathbb{R} rovnici s reálným parametrem b :

$$\frac{b}{x} - \frac{1}{bx} = 1 - \frac{1}{b}$$

2594

OK

b	0	1	-1	$\mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$
x	NS	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	NŘ	$b + 1$

18. Řešte rovnici s reálným parametrem k a neznámou x :

$$4x \cdot (1 - k) + k^2 \cdot (1 + x) = 4$$

2581

OK

k	2	$\mathbb{R} \setminus \{2\}$
x	\mathbb{R}	$\frac{k+2}{2-k}$

19. Řešte rovnici s reálným parametrem b a neznámou x :



$$(b^2 - 1) \cdot x = b - 1$$

2580

OK

b	1	-1	$\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
x	\mathbb{R}	NŘ	$\frac{1}{b+1}$

 **Obsah**

 1. Rovnice s parametrem	2
 2. Lineární rovnice s parametrem - procvičovací úlohy	4