Variace

1

Kvadratické rovnice pro učební obory

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

1. Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice je rovnice, která ve svém zápisu obsahuje neznámou ve druhé mocnině a zároveň neobsahuje neznámou v mocnině vyšší než druhé.

Obecně lze kvadratickou rovnici zapsat: **$ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$**

Podobně jako u kvadratické funkce, můžeme jednotlivé členy nazvat:

ax^2 ... kvadratický člen

bx ... lineární člen

c ... absolutní člen

Kvadratická rovnice má zpravidla **dva kořeny** x_1, x_2, může jich mít ale i méně. Zkoušku provádíme pro každý kořen zvlášť.

Jakoukoliv kvadratickou rovnici můžeme **řešit pomocí vzorce,** v němž se vyskytuje tzv. diskriminant kvadratické rovnice. Tento postup si ukážeme později. Pokud totiž kvadratická rovnice neobsahuje všechny členy, můžeme většinou použít i postupy jednodušší.

Každou kvadratickou rovnici, která obsahuje závorky, či zlomky, nejprve převedeme do tvaru

$ax^2 + bx + c = 0$

Tento tvar kvadratické rovnice nazýváme **anulovaný tvar kvadratické rovnice.**

Pozn.: Pokud tuto rovnici vydělíme koeficientem a, dostaneme tzv. **normovaný tvar kvadratické rovnice.**

Při řešení samozřejmě nezapomínáme na **podmínky řešitelnosti**, pro které platí stejná pravidla jako při řešení rovnic lineárních.

1. Kvadratická rovnice bez lineárního a bez absolutního členu

Jedná se o rovnici zapsanou obecně: $ax^2 = 0$

Takovouto rovnici řešíme snadno tak, že v prvním kroku celou rovnici vydělíme koeficientem a. Můžeme to provést, protože z definice víme, že koeficient a je nenulový.

Dostaneme tak: $x^2 = 0$

A odtud tedy: $x_{1,2} = \sqrt{0}$

$x_{1,2} = 0$

Protože vyšly oba kořeny shodné, hovoříme o tzv. **dvojnásobném kořenu.**

Příklad 1:

Řešte kvadratickou rovnici $3x^2 = 0$

Řešení:

$3x^2 = 0 \quad |:3$

$x^2 = 0$

$x_{1,2} = 0$

Můžeme tedy vyslovit jednoduchý závěr: **Každá kvadratická rovnice bez lineárního a bez absolutního členu má jeden dvojnásobný kořen, a tím je 0.**

2. Kvadratická rovnice bez lineárního členu

Jedná se o rovnici zapsanou obecně: **$ax^2 + c = 0$**

Rovnici řešíme tak, že v prvním kroku převedeme číslo c na pravou stranu:

Dostaneme: $ax^2 = -c$

Dále rovnici vydělíme koeficientem a:

Dostaneme: $x^2 = -c/a$

Nyní rovnici odmocníme. Pokud ale řešíme v oboru reálných čísel, můžeme tento krok provést pouze tehdy, že v případě, že je číslo a kladné, musí být číslo c záporné (a tedy -c kladné). Druhou odmocninu totiž můžeme v oboru reálných čísel provádět pouze z nezáporných čísel (číslo 0 už jsme ale rozebrali v předcházejícím odstavci)

Dostaneme: $x_{1,2} = \pm\sqrt{(-c/a)}$

Znamená to tedy, že $x_1 = +\sqrt{(-c/a)}$ $x_2 = -\sqrt{(-c/a)}$

Příklad 2:

Řešte kvadratickou rovnici $-3x^2 + 27 = 0$ v oboru reálných čísel.

Řešení:

$-3x^2 + 27 = 0 \quad |:(-1)$

$3x^2 - 27 = 0$

$3x^2 = 27 \quad |:3$

$x^2 = 9$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{9}$

$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$

Příklad 3:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $3x^2 + 6 = 0$

Řešení:

$3x^2 = -6$

$x^2 = -2$

V tomto případě nemá rovnice v oboru reálných čísel řešení.

Příklad 4:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $3x^2 - 6 = 0$

Řešení:

$3x^2 = 6$

$x^2 = 2$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$

$x_1 = +\sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$

3. Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Jedná se o rovnici, kterou můžeme zapsat obecně rovnicí **$ax^2 + bx = 0$**

Při řešení v prvním kroku na levé straně rozložíme na součin vytknutím x:

Dostaneme: $x.(ax + b) = 0$

Nyní využijeme vlastnosti, že součin je roven nule tehdy, když alespoň jeden z činitelů je roven nule.

Může tedy nastat, že $x_1 = 0$

nebo (ax + b) = 0 a odtud: $x_2 = -b/a$

Příklad 5:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $2x^2 + 6x = 0$

Řešení:

$x^2 + 3x = 0$

$x.(x + 3) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = -3$

Můžeme vyslovit jednoduchý závěr, že **kvadratická rovnice bez absolutního členu má jeden kořen vždy roven nule.**

4. Obecná kvadratická rovnice

Jedná se o rovnici obecně zapsanou $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

Samozřejmě předpokládáme, že už jsme zadanou rovnici převedli do výše uvedeného základního tvaru, tzn. odstranili jsme běžným způsobem závorky a zlomky.

Tento typ rovnice řešíme podle vzorce:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pokud je číslo b sudé, můžeme výhodně použít i vzorec pro poloviční hodnoty:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Příklad 6:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $x^2 + 4x - 60 = 0$

Řešení:

$a = 1 \qquad b = 4 \qquad c = -60$

Vzhledem k tomu, že b je sudé, použijeme vzorec pro poloviční hodnoty:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 1.(-60)}}{1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{1} = -2 \pm \sqrt{64}$$

$x_{1,2} = -2 \pm 8$

$x_1 = 6 \qquad x_2 = -10$

Příklad 7:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $3x^2 - 5x + 8 = 0$

Řešení:

a = 3 b = -5 c = 8

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.3.8}}{2.3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 96}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{-71}}{6}$$

V tomto případě nemá kvadratická rovnice v oboru reálných čísel řešení, protože v oboru reálných čísel nemůžeme vypočítat druhou odmocninu ze záporného čísla.

Pozn.: Výraz $b^2 - 4ac$, který se vyskytuje ve vzorci pro výpočet kvadratické rovnice pod odmocninou, nazýváme **diskriminant kvadratické rovnice.** Pro tento diskriminant, označovaný také D, platí:

- Je-li D > 0 ... kvadratická rovnice má dva reálné různé kořeny
- Je-li D = 0 ... kvadratická rovnice má jeden (dvojnásobný) kořen
- Je-li D < 0 ... kvadratická rovnice nemá v oboru reálných čísel žádné řešení

Příklad 8:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $3x^2 - 5x - 8 = 0$

Řešení:

a = 3 b = -5 c = -8

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.3.(-8)}}{2.3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 11}{6}$$

$x_1 = 8/3$ $x_2 = -1$

2. Kvadratické rovnice - procvičovací příklady

1. **Řešte rovnici v R:**
$x^2 + 2x - 3 = 0$ 2440

OK $x_1 = -3$; $x_2 = 1$

2. **Řešte rovnici v R:**
$x^2 - x = 0$ 2418

OK $x_1 = 0$; $x_2 = 1$

3. **Řešte rovnici v R:** 2420
$3x^2 = 8x$

OK $x_1 = 0;\ x_2 = \frac{8}{3}$

4. **Řešte rovnici v R:** 2436
$5x^2 - 8x + 5 = 0$

OK Rovnice nemá v oboru R žádné řešení.

5. **Řešte rovnici v R:** 2432
$x^2 - 4x + 4 = 0$

OK Rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 2$

6. **Řešte rovnici v R:** 2424
$64x^2 - 16x - 35= 0$

OK $x_1 = \frac{7}{8};\ x_2 = -\frac{5}{8}$

7. **Řešte rovnici v R:** 2438
$x^2 + 13x + 30 = 0$

OK $x_1 = -3;\ x_2 = -10$

8. **Řešte rovnici v R:** 2422
$(7y - 2)^2 = (3 - 5y)^2 - 5$

OK $y_1 = 0;\ y_2 = -\frac{1}{12}$

9. **Řešte rovnici v R:** 2427
$5x^2 - 18x - 8 = 0$

OK $x_1 = 4;\ x_2 = -0{,}4$

10. **Řešte rovnici v R:** 2415
$\frac{9}{5}x^2 - 5 = 0$

OK $x = \pm\frac{5}{3}$

11. **Řešte rovnici v R:** 2443
$x^2 - 6x + 10 = 0$

OK Rovnice nemá v oboru R žádné řešení.

12. **Řešte rovnici v R:** 2419
$x^2 - 5x = 0$

OK $x_1 = 0;\ x_2 = 5$

13. **Řešte rovnici v R:** 2425
$(x + 3) . (x + 4) + (x - 2) . (x - 1) = 30$

OK $x_1 = 2;\ x_2 = -4$

14. **Řešte rovnici v R:** 2434
$3x^2 - 5x - 2 = 0$

OK $x_1 = 2;\ x_2 = -1/3$

15. **Řešte rovnici v R:** 2445
$x^2 - \sqrt{5}.x - 10 = 0$
OK $x_1 = 2.\sqrt{5}$; $x_2 = -\sqrt{5}$

16. **Řešte rovnici v R:** 2435
$4x^2 + x - 3 = 0$
OK $x_1 = 3/4$; $x_2 = -1$

17. **Řešte rovnici v R:** 2414
$x^2 + 6x + 8 = 0$
OK $x_1 = -2$; $x_2 = -4$

18. **Řešte rovnici v R:** 2430

$$\frac{5}{x-9} = \frac{3}{x-9} + \frac{2(x+9)}{225}$$

OK $x_1 = \sqrt{306} = 17,5$; $x_2 = -\sqrt{306} = -17,5$

19. **Řešte rovnici v R:** 2441
$x^2 - 6x + 8 = 0$
OK $x_1 = 4$; $x_2 = 2$

20. **Řešte rovnici v R:** 2442
$x^2 - 6x + 9 = 0$
OK Rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 3$

21. **Řešte rovnici v R:** 2417
$4x^2 - 81 = 0$
OK

$$x = \pm\frac{9}{2}$$

22. **Řešte rovnici v R:** 2433
$4x^2 - 4x + 1 = 0$
OK Rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 0,5$

23. **Řešte rovnici v R:** 2431
$x^2 + x = 0$
OK $x_1 = 0$; $x_2 = -1$

24. **Řešte rovnici v R:** 2437
$x^2 - 13x + 30 = 0$
OK $x_1 = 3$; $x_2 = 10$

25. **Řešte rovnici v R:** 2439
$x^2 + 13x - 30 = 0$
OK $x_1 = -15$; $x_2 = 2$

26. **Řešte rovnici v R:** 2444
$x^2 - 6x + 11 = 0$
OK Rovnice nemá v oboru R žádné řešení.

27. **Řešte rovnici v R:** 2428
$(2x + 1) . (x - 3) + (2x - 1) . (x + 2) = 4x - 1$
OK $x_1 = 2$; $x_2 = -0,5$

28. **Řešte rovnici v R:** 2426
$10x^2 + 9x - 9= 0$
OK $x_1 = -1,5$; $x_2 = 0,6$

29. **Řešte rovnici v R:** 2429

$$\frac{5x}{4} = \frac{4}{5x}$$

OK $x = \pm\ 0{,}8$

30. **Řešte rovnici v R:** 2423
$4x^2 + 17x = 15$

OK $x_1 = 0{,}75$; $x_2 = -5$

31. **Řešte rovnici v R:** 2416
$79 - 7x^2 = 16$

OK $x = \pm\ 3$

32. **Řešte rovnici v R:** 2421
$6x^2 = -15x$

OK $x_1 = 0$; $x_2 = -2{,}5$

Obsah

1. Kvadratické rovnice 2
2. Kvadratické rovnice - procvičovací příklady 5