

Kvadratické rovnice pro studijní obory

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na www.jarjurek.cz.



1. Kvadratické rovnice

Kvadratická rovnice je rovnice, která ve svém zápisu obsahuje neznámou ve druhé mocnině a zároveň neobsahuje neznámou v mocnině vyšší než druhé.

Obecně lze kvadratickou rovnici zapsat: $ax^2 + bx + c = 0$, kde $a \neq 0$

Podobně jako u kvadratické funkce, můžeme jednotlivé členy nazvat:

ax^2 ... kvadratický člen

bx ... lineární člen

c ... absolutní člen

Kvadratická rovnice má zpravidla **dva kořeny** x_1, x_2 , může jich mít ale i méně. Zkoušku provádíme pro každý kořen zvlášť.

Jakoukoliv kvadratickou rovnici můžeme **řešit pomocí vzorce**, v němž se vyskytuje tzv. diskriminant kvadratické rovnice. Tento postup si ukážeme později. Pokud totiž kvadratická rovnice neobsahuje všechny členy, můžeme většinou použít i postupy jednodušší.

Každou kvadratickou rovnici, která obsahuje závorky, či zlomky, nejprve převedeme do tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Tento tvar kvadratické rovnice nazýváme **anulovaný tvar kvadratické rovnice**.

Pozn.: Pokud tuto rovnici vydělíme koeficientem a , dostaneme tzv. **normovaný tvar kvadratické rovnice**.

Při řešení samozřejmě nezapomínáme na **podmínky řešitelnosti**, pro které platí stejná pravidla jako při řešení rovnic lineárních.

1. Kvadratická rovnice bez lineárního a bez absolutního členu

Jedná se o rovnici zapsanou obecně: $ax^2 = 0$

Takovouto rovnici řešíme snadno tak, že v prvním kroku celou rovnici vydělíme koeficientem a . Můžeme to provést, protože z definice víme, že koeficient a je nenulový.

Dostaneme tak: $x^2 = 0$

A odtud tedy: $x_{1,2} = \sqrt{0}$

$$x_{1,2} = 0$$

Protože vyšly oba kořeny shodné, hovoříme o tzv. **dvojnásobném kořenu**.

Příklad 1:

Řešte kvadratickou rovnici $3x^2 = 0$

Řešení:

$$3x^2 = 0 \quad |:3$$

$$x^2 = 0$$

$$x_{1,2} = 0$$

Můžeme tedy vyslovit jednoduchý závěr: **Každá kvadratická rovnice bez lineárního a bez absolutního členu má jeden dvojnásobný kořen, a tím je 0.**

2. Kvadratická rovnice bez lineárního členu

Jedná se o rovnici zapsanou obecně: $ax^2 + c = 0$

Rovnici řešíme tak, že v prvním kroku převedeme číslo c na pravou stranu:

Dostaneme: $ax^2 = -c$

Dále rovnici vydělíme koeficientem a:

Dostaneme: $x^2 = -c/a$

Nyní rovnici odmocníme. Pokud ale řešíme v oboru reálných čísel, můžeme tento krok provést pouze tehdy, že v případě, že je číslo a kladné, musí být číslo c záporné (a tedy -c kladné). Druhou odmocninu totiž můžeme v oboru reálných čísel provádět pouze z nezáporných čísel (číslo 0 už jsme ale rozebrali v předcházejícím odstavci)

Dostaneme: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-c/a}$

Znamená to tedy, že $x_1 = +\sqrt{-c/a}$ $x_2 = -\sqrt{-c/a}$

Příklad 2:

Řešte kvadratickou rovnici $-3x^2 + 27 = 0$ v oboru reálných čísel.

Řešení:

$$-3x^2 + 27 = 0 \quad | :(-1)$$

$$3x^2 - 27 = 0$$

$$3x^2 = 27 \quad | :3$$

$$x^2 = 9$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{9}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

Příklad 3:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $3x^2 + 6 = 0$

Řešení:

$$3x^2 = -6$$

$$x^2 = -2$$

V tomto případě nemá rovnice v oboru reálných čísel řešení.

Příklad 4:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $3x^2 - 6 = 0$

Řešení:

$$3x^2 = 6$$

$$x^2 = 2$$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

$$x_1 = +\sqrt{2} \quad x_2 = -\sqrt{2}$$

3. Kvadratická rovnice bez absolutního členu

Jedná se o rovnici, kterou můžeme zapsat obecně rovnicí $ax^2 + bx = 0$

Při řešení v prvním kroku na levé straně rozložíme na součin vytknutím x:

Dostaneme: $x \cdot (ax + b) = 0$

Nyní využijeme vlastnosti, že součin je roven nule tehdy, když alespoň jeden z činitelů je roven nule.

Může tedy nastat, že $x_1 = 0$

nebo $(ax + b) = 0$ a odtud: $x_2 = -b/a$

Příklad 5:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $2x^2 + 6x = 0$

Řešení:

$$x^2 + 3x = 0$$

$$x \cdot (x + 3) = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -3$$

Můžeme vyslovit jednoduchý závěr, že **kvadratická rovnice bez absolutního členu má jeden kořen vždy roven nule.**

4. Obecná kvadratická rovnice

Jedná se o rovnici obecně zapsanou **$ax^2 + bx + c = 0$**

Samozřejmě předpokládáme, že už jsme zadanou rovnici převedli do výše uvedeného základního tvaru, tzn. odstranili jsme běžným způsobem závorky a zlomky.

Tento typ rovnice řešíme podle vzorce:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Pokud je číslo b sudé, můžeme výhodně použít i vzorec pro poloviční hodnoty:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

Příklad 6:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $x^2 + 4x - 60 = 0$

Řešení:

$$a = 1 \quad b = 4 \quad c = -60$$

Vzhledem k tomu, že b je sudé, použijeme vzorec pro poloviční hodnoty:

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 1 \cdot (-60)}}{1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{1} = -2 \pm \sqrt{64}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 8$$

$$x_1 = 6 \quad x_2 = -10$$

Příklad 7:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $3x^2 - 5x + 8 = 0$

Řešení:

$$a = 3 \quad b = -5 \quad c = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 96}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{-71}}{6}$$

V tomto případě nemá kvadratická rovnice v oboru reálných čísel řešení, protože v oboru reálných čísel nemůžeme vypočítat druhou odmocninu ze záporného čísla.

Pozn.: Výraz $b^2 - 4ac$, který se vyskytuje ve vzorci pro výpočet kvadratické rovnice pod odmocninou, nazýváme **diskriminant kvadratické rovnice**. Pro tento diskriminant, označovaný také D , platí:

- Je-li $D > 0$... kvadratická rovnice má dva reálné různé kořeny
- Je-li $D = 0$... kvadratická rovnice má jeden (dvojnásobný) kořen
- Je-li $D < 0$... kvadratická rovnice nemá v oboru reálných čísel žádné řešení

Příklad 8:

V oboru reálných čísel řešte kvadratickou rovnici $3x^2 - 5x - 8 = 0$

Řešení:

$$a = 3 \quad b = -5 \quad c = -8$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{6}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 11}{6}$$

$$x_1 = 8/3 \quad x_2 = -1$$



2. Kvadratické rovnice - procvičovací příklady

1. **Řešte rovnici v R:**
 $5x^2 - 8x + 5 = 0$

2436

OK Rovnice nemá v oboru R žádné řešení.

2. **Řešte rovnici v R:**
 $3x^2 - 5x - 2 = 0$

2434

OK $x_1 = 2; x_2 = -1/3$

3.	Řešte rovnici v R: $4x^2 - 81 = 0$	2417
OK	$x = \pm \frac{9}{2}$	
4.	Řešte rovnici v R: $4x^2 + 17x = 15$	2423
OK	$x_1 = 0,75; x_2 = -5$	
5.	Řešte rovnici v R: $\frac{5x}{4} = \frac{4}{5x}$	2429
OK	$x = \pm 0,8$	
6.	Řešte rovnici v R: $x^2 + 13x + 30 = 0$	2438
OK	$x_1 = -3; x_2 = -10$	
7.	Řešte rovnici v R: $x^2 + x = 0$	2431
OK	$x_1 = 0; x_2 = -1$	
8.	Řešte rovnici v R: $x^2 - 5x = 0$	2419
OK	$x_1 = 0; x_2 = 5$	
9.	Řešte rovnici v R: $x^2 - 6x + 11 = 0$	2444
OK	Rovnice nemá v oboru R žádné řešení.	
10.	Řešte rovnici v R: $4x^2 + x - 3 = 0$	2435
OK	$x_1 = 3/4; x_2 = -1$	
11.	Řešte rovnici v R: $5x^2 - 18x - 8 = 0$	2427
OK	$x_1 = 4; x_2 = -0,4$	
12.	Řešte rovnici v R: $x^2 - 13x + 30 = 0$	2437
OK	$x_1 = 3; x_2 = 10$	
13.	Řešte rovnici v R: $x^2 - 6x + 8 = 0$	2441
OK	$x_1 = 4; x_2 = 2$	
14.	Řešte rovnici v R: $x^2 - 4x + 4 = 0$	2432
OK	Rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 2$	
15.	Řešte rovnici v R: $x^2 + 6x + 8 = 0$	2414
OK	$x_1 = -2; x_2 = -4$	
16.	Řešte rovnici v R: $6x^2 = -15x$	2421
OK	$x_1 = 0; x_2 = -2,5$	

17.	Řešte rovnici v R: $4x^2 - 4x + 1 = 0$	2433
OK	Rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 0,5$	
18.	Řešte rovnici v R: $(7y - 2)^2 = (3 - 5y)^2 - 5$	2422
OK	$y_1 = 0; y_2 = -\frac{1}{12}$	
19.	Řešte rovnici v R: $x^2 + 2x - 3 = 0$	2440
OK	$x_1 = -3; x_2 = 1$	
20.	Řešte rovnici v R: $x^2 - \sqrt{5}x - 10 = 0$	2445
OK	$x_1 = 2\sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}$	
21.	Řešte rovnici v R: $(2x + 1) \cdot (x - 3) + (2x - 1) \cdot (x + 2) = 4x - 1$	2428
OK	$x_1 = 2; x_2 = -0,5$	
22.	Řešte rovnici v R: $x^2 + 13x - 30 = 0$	2439
OK	$x_1 = -15; x_2 = 2$	
23.	Řešte rovnici v R: $x^2 - x = 0$	2418
OK	$x_1 = 0; x_2 = 1$	
24.	Řešte rovnici v R: $(x + 3) \cdot (x + 4) + (x - 2) \cdot (x - 1) = 30$	2425
OK	$x_1 = 2; x_2 = -4$	
25.	Řešte rovnici v R: $10x^2 + 9x - 9 = 0$	2426
OK	$x_1 = -1,5; x_2 = 0,6$	
26.	Řešte rovnici v R: $x^2 - 6x + 10 = 0$	2443
OK	Rovnice nemá v oboru R žádné řešení.	
27.	Řešte rovnici v R: $\frac{9}{5}x^2 - 5 = 0$	2415
OK	$x = \pm \frac{5}{3}$	
28.	Řešte rovnici v R: $79 - 7x^2 = 16$	2416
OK	$x = \pm 3$	
29.	Řešte rovnici v R: $x^2 - 6x + 9 = 0$	2442
OK	Rovnice má jeden dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 3$	

30. Řešte rovnici v R:

$$\frac{5}{x-9} = \frac{3}{x-9} + \frac{2(x+9)}{225}$$

OK $x_1 = \sqrt{306} = 17,5; x_2 = -\sqrt{306} = -17,5$

2430

31. Řešte rovnici v R:

$$64x^2 - 16x - 35 = 0$$

OK $x_1 = \frac{7}{8}; x_2 = -\frac{5}{8}$

2424

32. Řešte rovnici v R:

$$3x^2 = 8x$$

OK $x_1 = 0; x_2 = \frac{8}{3}$

2420

3. Vztahy mezi kořeny a koeficienty

Každou kvadratickou rovnici zapsanou ve tvaru $ax^2 + bx + c = 0$ můžeme převést do tzv. **normovaného tvaru kvadratické rovnice**. Docílíme toho tak, že celou rovnici vydělíme koeficientem a . Provést to můžeme, protože z definice kvadratické rovnice vyplývá, že tento koeficient je různý od nuly.

Normovaný tvar kvadratické rovnice:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Pokud v takto upravené rovnici lze zlomky vykrátit tak, aby z nich vznikla celá čísla, můžeme při řešení kvadratické rovnice často využít vztah mezi kořeny a koeficienty (tzv. **Vietovy vzorce**) a vyřešit tak celou kvadratickou rovnici z paměti.

Položme: $p = b/a$ $q = c/a$

Dostaneme: $x^2 + px + q = 0$

Pro řešení kvadratické rovnice pak platí: $x_1 + x_2 = -p$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

Kvadratickou rovnici tedy nemusíme nyní už řešit jen podle vzorce, ale můžeme ji vyřešit též výše uvedenou soustavou rovnic. Z ní dostaneme přímo kořeny x_1, x_2 kvadratické rovnice.

Pozn.: Vztahu mezi kořeny a koeficienty můžeme leckdy využít i tehdy, potřebujeme-li trojčlen rozložit na součin dvou činitelů. Máme-li totiž trojčlen zapsaný ve tvaru $x^2 + px + q$, pak mnohdy snadno najdeme z paměti dvě čísla a, b , jejichž součet je $(-p)$ a jejichž součin je q . Hledaný rozklad má pak tvar $(x - a) \cdot (x - b)$

Postup vztahu mezi kořeny a koeficienty můžeme využít i tehdy, známe-li kořeny kvadratické rovnice a potřebujeme najít naopak zadání kvadratické rovnice.

Příklad 1:

Napište kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou 5 a -8

Řešení

$$\text{Platí } (x - 5) \cdot (x + 8) = 0$$

$$x^2 + 8x - 5x - 40 = 0$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

Jiný způsob řešení:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

$$5 - 8 = -p \quad \text{proto } p = 3$$

$$5 \cdot (-8) = q \quad \text{proto } q = -40 \quad \text{Závěr: } x^2 + 3x - 40 = 0$$

**4. Vztahy mezi kořeny a koeficienty - procvičovací příklady**

1. **Napište kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla $\sqrt{5} - 3$ a $\sqrt{5} + 3$** 2602

OK $x^2 - 2x\sqrt{5} - 4 = 0$

2. **Napište kvadratickou rovnici s jediným řešením, kterým je číslo 5.** 2604

OK $x^2 - 10x + 25 = 0$

3. **Sestavte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla 3 a -2.** 2598

OK $x^2 - x - 6 = 0$

4. **Stanovte kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou: $x_1 = 0,5$; $x_2 = 3$** 2608

OK $x^2 - 3,5x + 1,5 = 0$

5. **Napište kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla 0,2 a -5.** 2603

OK $x^2 + 4,8x - 1 = 0$

6. **Stanovte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou: $x_1 = -3\sqrt{3}$, $x_2 = 2\sqrt{3}$** 2607

OK $x^2 + x\sqrt{3} - 18 = 0$

7. **Napište kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla -3 a 0.** 2601

OK $x^2 + 3x = 0$

8. **Pro která p má rovnice $x^2 - px + 10 = 0$ kořen 2?** 2599

OK $p = 7$

9. **Pro která p má rovnice $x^2 + px + 15 = 0$ kořen 5?** 2600

OK $p = -8$

10. **Pro které hodnoty reálného parametru m má daná kvadratická rovnice o reálné neznámé x jeden kořen roven nule? Jakou hodnotu má druhý kořen?** 2605

$$x^2 + 3x - 2m^2 + m + 3 = 0$$

OK $m = 1,5$ nebo $m = -1$; druhý kořen je pak $x = -3$

11. **Sestavte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla 2 a 3.** 2597

OK $x^2 - 5x + 6 = 0$

12. **Pro které hodnoty reálného parametru m má daná kvadratická rovnice o reálné neznámé x jeden kořen roven nule? Jakou hodnotu má pak druhý kořen?** 2606

$$x^2 - x + m^2 - m - 12 = 0$$

OK $m = -3$ nebo $m = 4$; druhý kořen je pak $x = 1$

**5. Rozklad kvadratického trojčlenu na součin**

Rozložit kvadratický trojčlen potřebujeme při výpočtech některých dalších příkladů - např. při řešení rovnic, nerovnic, úpravách algebraických výrazů, apod.

Máme-li zadán kvadratický trojčlen, na součin ho rozložíme tak, že nejprve vyřešíme pomocnou kvadratickou rovnici. Tu sestavíme tak, že trojčlen zapíšeme na levou stranu rovnice, jejíž pravá strana bude rovna nule. Získané kořeny pak zapíšeme do závorek, v nichž bude dvojčlen, tvořený proměnnou a vypočteným kořenem zapsaným s

opačným znaménkem; v závorkách tedy bude vždy součet nebo rozdíl. Pokud v zadaném kvadratickém trojčlenu bylo číslo $a \neq 1$, pak ve vytvořeném součinu bude ještě další činitel, a tím je právě koeficient a .

Příklad 1:

Rozložte na součin kvadratický trojčlen $x^2 - 3x - 10$.

Řešení:

Sestavíme pomocnou kvadratickou rovnici:

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Tuto rovnici vyřešíme standardním způsobem - tedy např. přes diskriminant a vzorec.

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 9 + 40 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$x_1 = 5$$

$$x_2 = -2$$

Sestavíme požadovaný součin: $(x - 5) \cdot (x + 2)$

Pozn.:

Pro určení kořenů pomocné kvadratické rovnice můžeme použít i vztahů, platících mezi kořeny a koeficienty - tzv. Vietovy vzorce:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = q$$

kde p, q jsou koeficienty u rovnice ve tvaru $x^2 + px + q = 0$

Příklad 2:

Rozložte na součin kvadratický trojčlen $2x^2 - 3x - 10$.

Řešení:

Sestavíme pomocnou kvadratickou rovnici:

$$2x^2 - 3x - 10 = 0$$

Tuto rovnici vyřešíme standardním způsobem - tedy např. přes diskriminant a vzorec.

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 9 + 80 = 89$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{89}}{4}$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{89}}{4}$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{89}}{4}$$

Sestavíme požadovaný součin:

$$2 \left(x - \frac{3 + \sqrt{89}}{4} \right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{89}}{4} \right)$$

Pokud pomocná kvadratická rovnice nemá v oboru reálných čísel řešení, pak v tomto oboru neexistuje ani rozklad kvadratického trojčlenu na součin.



6. Rozklad kvadratického trojčlenu na součin - procvičovací příklady

1. Rozlož na součin kvadratický trojčlen: $-12x^2 + 5x + 2$

2453

OK $-(3x - 2) \cdot (4x + 1)$

2. Rozlož na součin kvadratický trojčlen $x^2 - 5x + 6$

2449

OK $(x - 2) \cdot (x - 3)$

3. Rozlož na součin kvadratický trojčlen: $x^2 + 3x + 1$

2451

OK $\left(x + \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$

4. Rozlož na součin kvadratický trojčlen: $10x^2 + 39x + 14$

2454

OK $(5x + 2) \cdot (2x + 7)$

5. Rozlož na součin kvadratický trojčlen $2x^2 + 10x + 12$

2448

OK $2 \cdot (x + 2) \cdot (x + 3)$

6. Rozlož na součin kvadratický trojčlen: $12x^2 - 19x + 7,5$

2452

OK $(6x - 5) \cdot (2x - 1,5)$

7. Rozlož na součin kvadratický trojčlen $x^2 + 4x + 4$

2447

OK $(x + 2) \cdot (x + 2)$

8. Rozlož na součin kvadratický trojčlen: $-x^2 + x + 12$

2455

OK $-(x + 3) \cdot (x - 4)$

9. Rozlož na součin kvadratický trojčlen $x^2 + x + 3$

2446

OK Nelze v R na součin rozložit.

10. Rozlož na součin kvadratický trojčlen:

2450

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 1$$

OK $(x - 1 - \sqrt{2})(x + 1 - \sqrt{2})$

 Obsah

 1. Kvadratické rovnice	2
 2. Kvadratické rovnice - procvičovací příklady	5
 3. Vztahy mezi kořeny a koeficienty	8
 4. Vztahy mezi kořeny a koeficienty - procvičovací příklady	9
 5. Rozklad kvadratického trojčlenu na součin	9
 6. Rozklad kvadratického trojčlenu na součin - procvičovací příklady	11