Variace

1

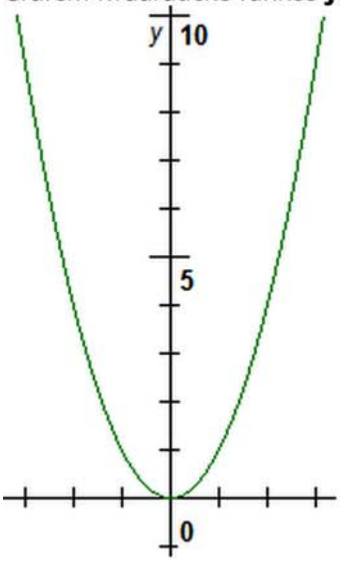
Kvadratická funkce

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

1. Kvadratická funkce

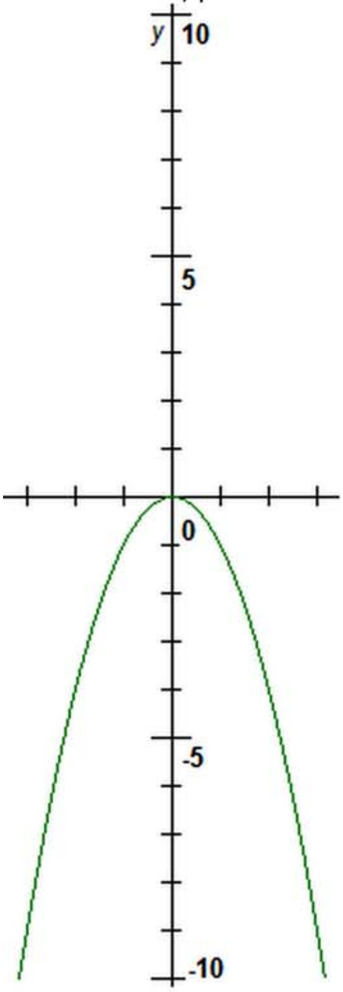
Kvadratická funkce je funkce, která je dána rovnicí $y = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou reálná čísla a číslo $a \neq 0$.

Grafem kvadratické funkce **je parabola** (nebo její část).



Definičním oborem kvadratické funkce jsou všechna reálná čísla.

Je-li číslo $a > 0$, pak má funkce **minimum** (viz horní obrázek), je-li $a < 0$, pak má funkce **maximum.**



Názvy členů funkce:

ax^2 ... kvadratický člen
bx ... lineární člen
c ... absolutní člen

I. Kvadratická funkce bez lineárního a bez absolutního členu

- jedná se o funkci, která je dána rovnicí $y = ax^2$
- definičním oborem jsou všechna reálná čísla
- oborem hodnot je interval $\langle 0; +\infty)$, je-li $a > 0$ a interval $(-\infty ; 0\rangle$ je-li $a < 0$
- souřadnice maxima (resp. minima): M[0; 0]
- graf tedy protíná obě osy v počátku souřadného systému
- čím je absolutní hodnota čísla *a* větší, tím je graf užší, sevřenější.

II. Kvadratická funkce bez lineárního členu

- jedná se o funkci, která je dána rovnicí $y = ax^2 + c$
- definičním oborem jsou opět všechna reálná čísla
- oborem hodnot je interval: pro $a > 0$ ... $\langle c; +\infty)$
  pro $a < 0$ ... $(-\infty ; c\rangle$
- souřadnice maxima (resp. minima): M[0; c]
- graf tedy protíná osu y v bodě, který nazýváme maximum (resp. minimum)
- je-li $c > 0$ a zároveň $a < 0$ nebo $c < 0$ a zároveň $a > 0$, pak graf protíná i osu x, a to ve dvou bodech, které jsou osově souměrné podle osy y. Souřadnice průsečíků s osou x mají v tomto případě souřadnice:

$$X_1\left[\sqrt{\frac{-c}{a}};0\right] \qquad X_2\left[-\sqrt{\frac{-c}{a}};0\right]$$

III. Kvadratická funkce se všemi členy

- jedná se o funkci, která je dána rovnicí $y = ax^2 + bx + c$
- definičním oborem jsou opět všechna reálná čísla

Příklad 1:

Je dána funkce $y = 2x^2 + 3x + 4$. Určete, zda má funkce maximum nebo minimum, zjistěte jeho souřadnice a určete souřadnice průsečíků s oběma osami.

Řešení:

1. Zda má funkce maximum nebo minimum, to rozhodneme podle čísla a. Vzhledem k tomu, že $a = 2$, což je větší než nula, má funkce minimum. Jeho souřadnice určíme tzv. doplněním na čtverec. Postup:
2. Vytkneme číslo a ... $y = 2.(x^2 + 1{,}5x + 2)$
3. Podíváme se, jaké znaménko je u lineárního členu a podle toho rozhodneme, zda použijeme vzorec $(A+B)^2$ nebo $(A-B)^2$. V tomto případě použijeme ten první.
4. Z kvadratického členu u trojčlenu v závorce určíme číslo A. V tomto případě je tedy x.
5. Z lineárního členu u trojčlenu v závorce určíme číslo B. V tomto případě je tedy 0,75
6. Použijeme vzorec a dostaneme $y = 2.[(x + 0{,}75)^2 - 0{,}75^2 + 2]$ Pozn. $0{,}75^2$ odečítáme proto, aby nebyla porušena rovnost, protože jsme to zahrnuli do závorky
7. Odstraníme hranatou závorku roznásobením číslem a:
   $y = 2.(x + 0{,}75)^2 + 2{,}875$
8. Určíme souřadnice hledaného minima: M[-0,75; 2,875]. Všimněme si, že první souřadnici určujeme vždy s opačným znaménkem než má člen v závorce a naopak u druhé souřadnice zůstává znaménko zachováno.
9. Určíme průsečíky s osami:

a) s osou x V tomto případě $y = 0$, dosadíme do rovnice funkce a vypočteme x
$2x^2 + 3x + 4 = 0$
Diskriminant $D = 3^2 - 4.2.4 = 9 - 32 = -23$
Vzhledem k tomu, že diskriminant vyšel záporný, nemá kvadratická rovnice řešení a neexistují tedy průsečíky s osou x.

b) s osou y V tomto případě x = 0, dosadíme do rovnice funkce a vypočteme y
$y = 2.0^2 + 3.0 + 4 = 4$
Hledané souřadnice tedy jsou Y[0; 4]

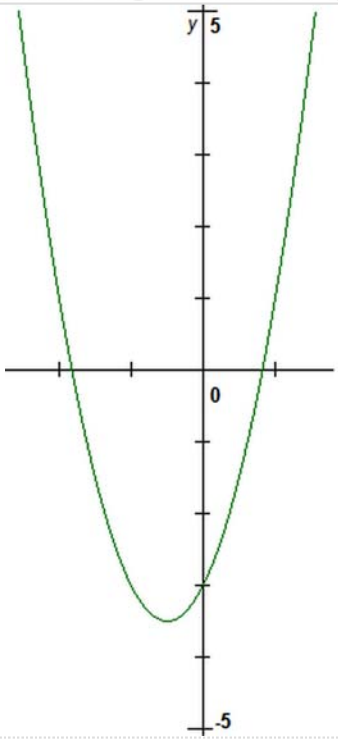
Pokud máme souřadnice průsečíků a souřadnice extrému (tj. minima nebo maxima), pak můžeme snadno určit průběh grafu a graf tedy načrtnout. Číslo 2 před závorkou nám ještě říká, že graf bude trochu užší.

Ačkoliv to nebylo úkolem, můžeme nyní i určit obor hodnot funkce zadané v předcházejícím příkladu. Je to jednoduché. Funkce má minimum, tedy hodnoty se nedostanou pod druhou souřadnici tohoto bodu. Oborem hodnot je tedy interval <2,875; +∞)

2. Kvadratická funkce - procvičovací příklady

1. **Načrtněte graf funkce f: $y = 2x^2 + 2x - 3$.** 1399

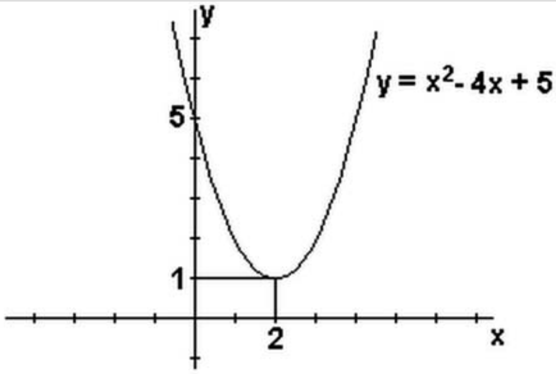
OK



2. **Dokažte, že hodnota funkce m: $y = x^2 - 4x + 5$ je v každém bodě $x \in D(m)$ kladné číslo.** 1393

OK

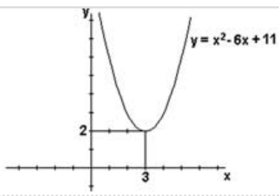
Platí - viz graf



3. **Je dána funkce f: $y = x^2 - 6x + 11$. Rozhodněte, zda existuje alespoň jedno $x \in D(f)$, pro které platí $f(x) = 1$.** 1391

OK

Neexistuje - viz graf

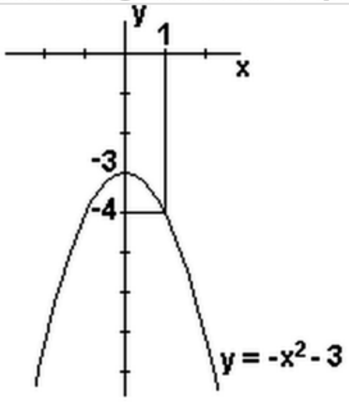


4. **Napiš libovolnou rovnici kvadratické funkce, která má stejný tvar grafu jako funkce $y = 2x^2 + 6$, ale je vůči tomuto grafu posunuta ve směru osy y směrem dolů, tedy více do záporné části.** 3132

OK Jedná se o libovolnou funkci $y = 2x^2 + a$, kde $a < 6$.

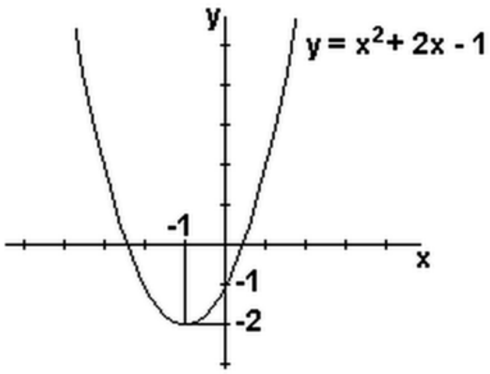
5. **Načrtněte graf funkce f: $y = -x^2 - 3$** 1385

OK



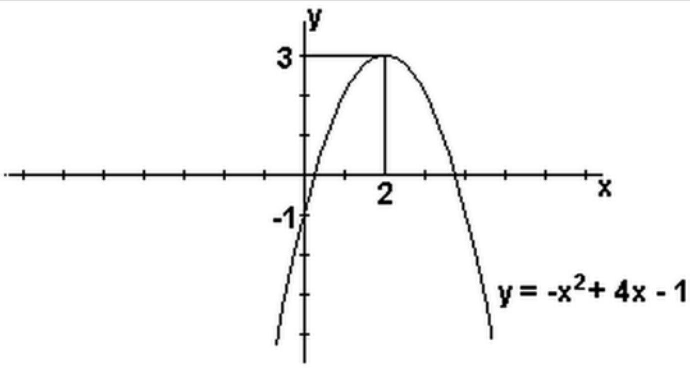
6. **Načrtněte graf funkce f: $y = x^2 + 2x - 1$.** 1400

OK



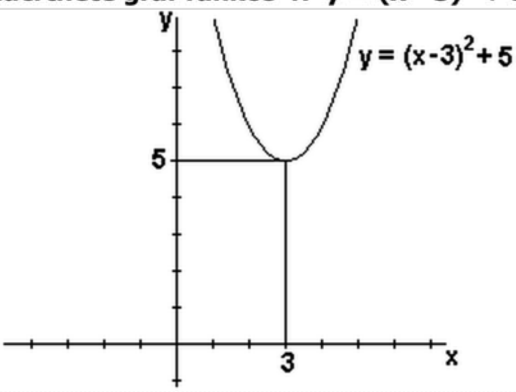
7. **Načrtněte graf funkce f: $y = -x^2 + 4x - 1$.** 1401

OK



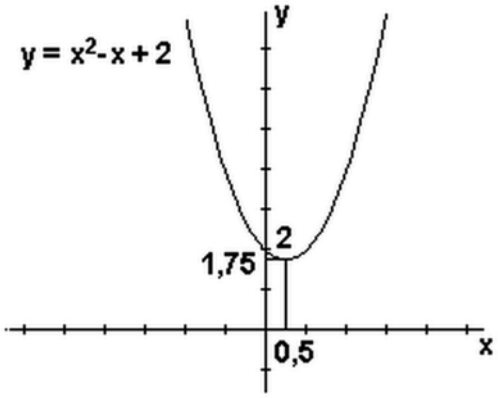
8. **Načrtněte graf funkce f: $y = (x - 3)^2 + 5$.** 1396

OK



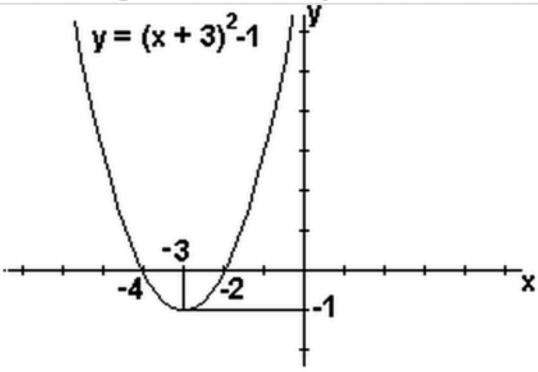
9. **Načrtněte graf funkce f: $y = x^2 - x + 2$** 1398

OK



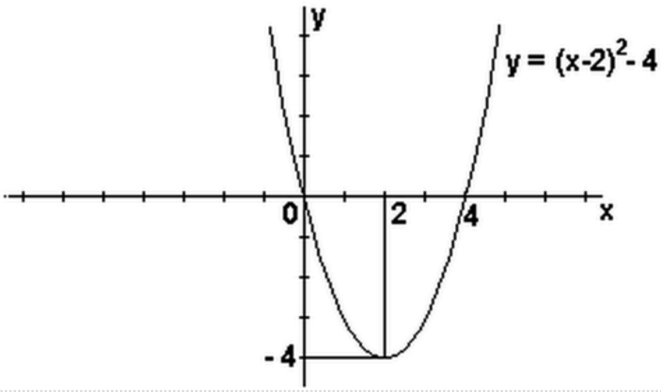
10. **Načrtněte graf funkce f: $y = x^2 + 6x + 8$** 1390

OK



11. **Načrtněte graf funkce f: $y = x^2 - 4x$** 1389

OK

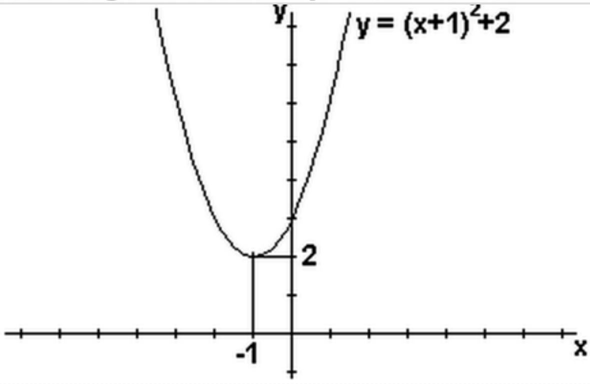


12. **Určete všechny kvadratické funkce, jejichž prvky jsou tyto uspořádané dvojice: [-2; 26], [0; 4], [1; 2].** 1395

OK Kvadratická funkce má rovnici $y = 3x^2 - 5x + 4$.

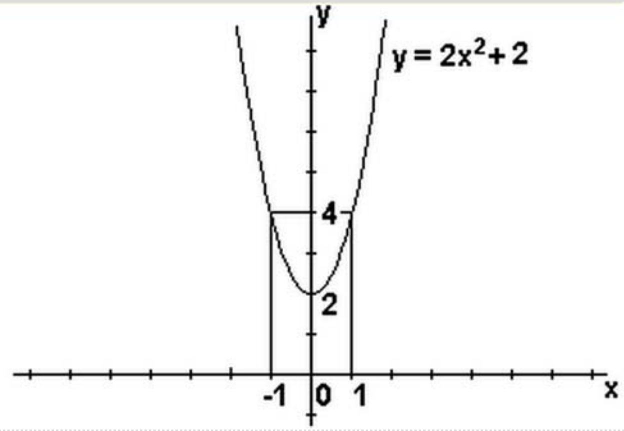
13. **Načrtněte graf funkce f: $y = x^2 + 2x + 3$** 1388

OK



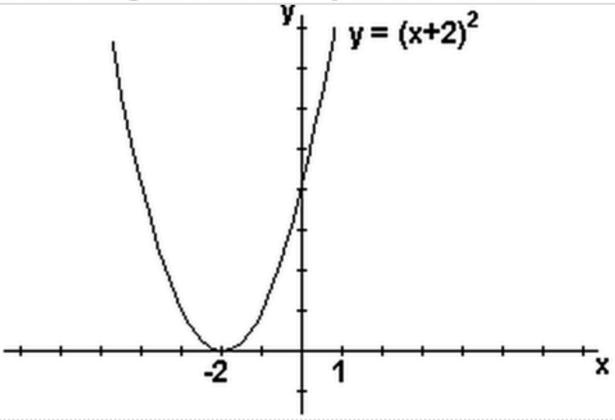
14. **Načrtněte graf funkce f: $y = 2x^2 + 2$** 1384

OK



15. **Načrtněte graf funkce f: $y = x^2 + 4x + 4$** 1387

OK



16. **Určete všechny kvadratické funkce, jejichž prvky jsou tyto uspořádané dvojice: [0; 0], [-2; 4], [3; 6].** 1394

OK Kvadratická funkce má rovnici $y = 0{,}8x^2 - 0{,}4x$.

17. **Může být kvadratická funkce funkcí lichou? Pokud ano, zapiš rovnici konkrétní takové funkce.** 3130

OK Kvadratická rovnice nemůže být nikdy funkcí lichou.

18. **Jak se nazývá graf kvadratické funkce? Může mít kvadratická funkce maximální hodnotu ve svém definičním oboru? Pokud ano, tak za jakých podmínek?** 3128

OK Graf se nazývá parabola. Kvadratická funkce ve svém definičním oboru může mít maximální hodnotu (= maximum), ale pouze v případě, že koeficient u kvadratického členu je záporné číslo.

19. **Může být kvadratická funkce funkcí sudou? Pokud ano, zapiš rovnici konkrétní takové funkce.** 3129

OK Kvadratická rovnice může být sudá; situace nastane tehdy, je-li rovnice funkce bez lineárního členu.

Obsah