

Iracionální rovnice

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na www.jarjurek.cz.

1. Iracionální rovnice

Iracionální rovnici nazýváme takovou rovnici, která **má neznámou pod odmocninou**.

Při řešení iracionálních rovnic používáme zpravidla **neekvivalentní úpravy** (tj. takové úpravy, po jejichž provedení se může změnit řešení rovnice), proto **musíme vždy provést zkoušku**.

Mezi neekvivalentní úpravy, které budeme u těchto typů příkladů používat, patří nejčastěji **umocnění rovnice na druhou**. Umocnění rovnice provedeme tak, že umocníme levou i pravou stranu rovnice.

Pozn.: Umocněním obou stran rovnice na druhou dostaneme rovnici, pro kterou platí: **Každý kořen původní rovnice je i kořenem této nové rovnice. Obráceně to ale neplatí!**

Ukázkové příklady:

Příklad 1:

Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 10} = x - 10$$

Řešení:

Umocněním rovnice na druhou dostaneme:

$$x^2 - 2x + 10 = (x - 10)^2$$

$$x^2 - 2x + 10 = x^2 - 20x + 100$$

po úpravě:

$$x = 5$$

Zkouška:

$$L = \sqrt{5^2 - 2 \cdot 5 + 10} = 5$$

$$P = 5 - 10 = -5$$

$$L \neq P$$

Daná rovnice tedy nemá řešení.

Příklad 2:

Řešte rovnici:

$$\sqrt{x + 7} = x - 5$$

Řešení:

Umocněním dostaneme rovnici:

$$x + 7 = (x - 5)^2$$

Po úpravě

$$x + 7 = x^2 - 10x + 25$$

Dostali jsme kvadratickou rovnici, u níž zjistíme, že má kořeny 2 a 9.

Zkouška:

$$L(2) = \sqrt{2+7} = \sqrt{9} = 3$$

$$P(2) = 2 - 5 = -3$$

$$L(2) \neq P(2)$$

Kořen 2 tedy není řešením.

$$L(9) = \sqrt{9+7} = \sqrt{16} = 4$$

$$P(9) = 9 - 5 = 4$$

$$L(9) = P(9)$$

Kořen 9 tedy je řešením zadané iracionální rovnice.

Příklad 3:

Řešte rovnici:

$$\sqrt{5-5x} = \sqrt{3x-11}$$

Řešení:

Umocněním dostaneme rovnici:

$$(5 - 5x) = (3x - 11)$$

Po úpravě:

$$x = 2$$

Zkouška:

$$L = \sqrt{5-5 \cdot 2} = \sqrt{-5}$$

Dále řešit nemusíme, protože v oboru reálných čísel neexistuje druhá odmocnina ze záporného čísla. Závěr tedy je, že iracionální rovnice nemá řešení.

Příklad 4:

Řešte rovnici:

$$\sqrt{x+9} + 3\sqrt{x} = 7$$

Řešení:

Umocněním rovnice na druhou dostaneme:

$$x + 9 + 6\sqrt{x}\sqrt{x+9} + 9x = 49$$

Po ekvivalentních úpravách:

$$3\sqrt{x}\sqrt{x+9} = 20 - 5x$$

Umocníme ještě jednou a dostaneme:

$$9x^2 + 81x = 400 - 200x + 25x^2$$

Po úpravě:

$$16x^2 - 281x + 400 = 0$$

Kořeny této rovnice jsou čísla 16 a 25/16

Zkouškou se přesvědčíme, že kořenem zadané iracionální rovnice je pouze číslo 25/16.

Příklad 5:

Řešte rovnici:

$$\sqrt{x^2 + 9} = 5$$

Kromě běžného, už uvedeného, postupu můžeme zde použít i následující úvahu:

Výraz na levé straně rovnice je definován pro libovolné reálné číslo a je pro libovolné reálné číslo nezáporný, proto rovnice $x^2 + 9 = 25$ je ekvivalentní s rovnicí původní. Rovnice $x^2 + 9 = 25$ má dvě řešení, a to $x_1 = 4$ a $x_2 = -4$. Tato řešení jsou tedy i řešeními rovnice původní. S ohledem na to, že jsme provedli pouze ekvivalentní úpravy, nemusíme v podstatě ani dělat zkoušku. Pro nezáporná čísla u, v je totiž $u = v$ právě tehdy, když platí $u^2 = v^2$.



2. Iracionální rovnice - procvičovací příklady

1. Řešte rovnici v R:

$$2 \cdot \sqrt{x(x-5)} - 3 = x$$

OK P = {9; -1/3}

2408

2. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{(x+1)(x-5)} - \sqrt{7-3x} = 0$$

OK -3

2409

3. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{x^2 - 3} + 3 = x$$

OK Nemá řešení

2398

4. Řešte rovnici v R:

$$3 \cdot \sqrt{x+5} = x-5$$

OK 20

2394

5. Řešte rovnici v R:

$$x+1 = \sqrt{5x+1}$$

OK P = {0; 3}

2402

6. Řešte rovnici v R:

$$x-2 = \sqrt{2x-1}$$

OK 5

2405

7. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2x+3}$$

OK 2,5

2404

8. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{x^2 - 39} + 3 = x$$

OK 8

2399

9. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{31+x-x^2} = 5-x$$

OK -0,5

2407

10. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 5} + 2x = 0$$

OK -5/3

2406

11. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{(x+3)(x-1)} - \sqrt{x(1-x)} = 0$$

OK 1

2410

12. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+8}} = x+1$$

OK $P = \{0; 2\}$

2397

13. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{13-x} = 2$$

OK 9

2411

14. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{4-x} = 1$$

OK 3

2396

15. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{7x-3} - \sqrt{x-3} = \sqrt{3x+4}$$

OK 4

2413

16. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+1} = 0$$

OK Nemá řešení

2403

17. Řešte rovnici v R:

$$\sqrt{7x+8} - \sqrt{5x-4} = 2$$

OK $P = \{8; 4\}$

2412

18. Řešte rovnici v R:

$$3 \cdot \sqrt{x+5} = 5-x$$

OK -1

2401

19. Řešte rovnici v R:

$$x^2 + \sqrt{x^2 - 9} = 21$$

OK $\pm 3\sqrt{2}$

2395

20. **Řešte rovnici v R:**

2400

$$x - 5 - \sqrt{3x - 11} = 0$$

OK 9

 **Obsah**

- | | |
|--|---|
|  1. Iracionální rovnice | 2 |
|  2. Iracionální rovnice - procvičovací příklady | 4 |