

Finanční matematika

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na www.jarjurek.cz.

1. Finanční matematika

Finanční matematika se zabývá ukládáním a půjčováním peněz, pojišťováním, odhady rizik apod. Jedná se o poměrně důležitou a výnosnou disciplínu.

Seznamme se nyní s některými základními pojmy:

Spoření

Při spoření vkladatel uloží do banky své peníze (fakticky své peníze bance půjčí). Banka s takto získanými penězi podniká a za vypůjčení vkladateli platí tím, že mu vrátí více peněz než si půjčil (úrok).

Důležité termíny:

Jistina – vložená částka, není majetkem banky stále zůstává majetkem vkladatele

Úrok – částka, kterou banka platí vkladateli za to, že si u ní peníze uložil (za to, že je bance půjčil), většinou se udává v procentech vložené částky

Roční úroková míra – částka v procentech udávající velikost úroku za uložení peněz na jeden rok. Při roční úrokové míře 3 % zaplatí banka vkladateli za uložení 100 000 Kč po dobu jednoho roku 3 000 Kč. Pokud si tento vkladatel své peníze po roce vybere z banky dostane místo vložených 100 000 Kč 103 000 Kč.

Úrokovací období – doba, po které banka vypočte a připiše vkladateli úroky. Obvykle se úrokuje po jednom roce, ale časté je i měsíční nebo dokonce denní (na běžných účtech) úrokování.

Úrokovací doba – doba, po kterou vkladatel bance peníze půjčuje

Výpovědní lhůta – protože banka půjčené peníze investuje, potřebuje dopředu vědět, kdy bude muset peníze vrátit. Proto musí vkladatel ve většině případů dopředu oznámit, kdy bude peníze vybírat. Tato doba se nazývá výpovědní lhůta. Pokud potřebuje v nutném případě vkladatel peníze vybrat dříve, musí bance zaplatit pokutu. V případě vkladů s delší výpovědní lhůtou (například dva roky) je běžné, že vkladatel vypoví vklad ihned při jeho vložení.

Daň z příjmu – příjmy z úroků patří mezi příjmy, ze kterých se platí daň. V tomto okamžiku je tato daň v jednotné výši 15 %.

Depozitní certifikát (vkladový list) - je to cenný papír, který vydává banka (dlužník) klientovi (věřiteli) jako potvrzení o přijetí vkladu.

2. Jednoduché úrokování

Při **jednoduchém úrokování** se úrok nepřidává k vložené částce a banka ho neúročí. Chování vkladatele v takovém případě je příkladem tzv. **rentiérského chování** = vložíme do banky určitou částku a žijeme z úroků.

Vzorec pro úrok U_n a pro kapitál K_n po n letech při jednoduchém úrokování:

$$U_n = k \cdot i \cdot n \cdot K_0$$

$$K_n = K_0(1 + k \cdot i \cdot n)$$

Vysvětlení použitých veličin:

k	...	zdaňovací koeficient
i	...	úroková míra vyjádřená desetinným číslem
K_0	...	počáteční kapitál (vklad, úvěr)
n	...	počet let, po který se kapitál úročí (úročí se jednou ročně)

Věřitel po celou dobu žádné částky z vloženého kapitálu ani úroky nepožaduje (z vkladu se nevybírá, úvěr se splácí i s úroky až po n letech).

Příklad 1:

Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3 %. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden rok? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka nepřisuzuje ke vkladu, ale posílá je Pavlovi na jeho běžný účet. Urči jeho majetek vždy na konci roku.

Řešení:

Úrok, který zaplatí banka za 1 rok: $50\,000 \cdot 0,03 = 1\,500$ Kč

Úrok po zdanění: $50\,000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 1\,275$ Kč

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých roků:

Po 1. roce: $50\,000 + 50\,000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 51\,275$ Kč

Po 2. roce: $50\,000 + 2 \cdot 50\,000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 52\,550$ Kč (banka mu poslala úroky dvakrát)

Po 3. roce: $50\,000 + 3 \cdot 50\,000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 53\,825$ Kč (banka mu poslala úroky třikrát)

Po 4. roce: $50\,000 + 4 \cdot 50\,000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 55\,100$ Kč (banka mu poslala úroky čtyřikrát)

Po 5. roce: $50\,000 + 5 \cdot 50\,000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 56\,375$ Kč (banka mu poslala úroky pětkrát)

Předchozí příklad je nejjednodušším příkladem **jednoduchého úrokování**.

Příklad 2:

Jakou částku by bylo nutné uložit v bance na úrok 3 %, aby roční úrok dosáhl 120 000 Kč (tedy 10 000 Kč na měsíc)?

Řešení:

Nutná částka ... x

Roční úrok ... x $\cdot 0,03 \cdot 0,85 = 120\,000$

$$x = \frac{120000}{0,03 \cdot 0,85} = 4\,705\,882 \text{ Kč}$$

Pokud chceme, aby nám banka vyplácela každý měsíc 10 000 Kč na úrocích, musíme mít na 3% úrok uloženo přibližně 4,7 miliónu korun.

Příklad 3:

Pavel uložil 50 000 Kč u konkurenční banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3 %. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden měsíc? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka nepřisuzuje ke vkladu, ale posílá je Pavlovi na jeho běžný účet. Urči jeho majetek po pěti letech spoření.

Řešení:

Úrok, který zaplatí banka za 1 měsíc:

$$50\,000 \cdot \frac{0,03}{12} = 125 \text{ Kč}$$

(3 % je roční úroková míra, měsíc je jedna dvanáctina roku)

Úrok po zdanění:

$$50\,000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 106,25 \text{ Kč}$$

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých měsíců:

Po 1. měsíci:

$$50\,000 + 50\,000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 50\,106,25 \text{ Kč}$$

Po 2. měsíci:

$$50\,000 + 2 \cdot 50\,000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 50\,212,50 \text{ Kč}$$

(Banka mu poslala úroky dvakrát.)

Po 3. měsíci:

$$50\,000 + 3 \cdot 50\,000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 50\,318,75 \text{ Kč}$$

(Banka mu poslala úroky třikrát.)

Po n-tém měsíci:

$$50\,000 + n \cdot 50\,000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 \text{ Kč}$$

(Banka mu poslala úroky n-krát.)

Spočteme si ušetřené částky po zajímavém období:

Po 12. měsíci:

$$50\,000 + 12 \cdot 50\,000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 51\,275 \text{ Kč}$$

Po 60. měsíci:

$$50\,000 + 60 \cdot 50\,000 \cdot \frac{0,03}{12} \cdot 0,85 = 56\,375 \text{ Kč}$$

Jak je vidět při jednoduchém úrokování nezáleží na délce úrokovacího období.



3. Jednoduché úrokování - procvičovací příklady

1. **Podnikatel chce získat úvěr 5 milionů Kč na jeden rok. První banka nabízí vyplatit celou hotovost a požaduje úrok ve výši 14 % z půjčené částky při její splatnosti. Druhá banka odečte ihned při poskytnutí úvěru z požadované částky 14 % a dlužník po roce splatí 5 milionů Kč. Kolik korun by podnikateli vyplatila druhá banka, kdyby požádal o 5 milionů korun?** 3786
 OK Podnikatel by od druhé banky obdržel 4 300 000 Kč.
2. **Podnikatel chce získat úvěr 5 milionů Kč na jeden rok. První banka nabízí vyplatit celou hotovost a požaduje úrok ve výši 14 % z půjčené částky při její splatnosti. Druhá banka odečte ihned při poskytnutí úvěru z požadované částky 14 % a dlužník po roce splatí 5 milionů Kč. O jak vysoký úvěr by musel podnikatel požádat v druhé bance, aby získal 5 milionů Kč?** 3787
 OK Podnikatel by musel žádat o 5 813 953,50 Kč.
3. **Podnikatel chce získat úvěr 5 milionů Kč na jeden rok. První banka nabízí vyplatit celou hotovost a požaduje úrok ve výši 14 % z půjčené částky při její splatnosti. Druhá banka odečte ihned při poskytnutí úvěru z požadované částky 14 % a dlužník po roce splatí 5 milionů Kč. Která z obou bank poskytuje výhodnější úvěr?** 3788
 OK Finančně výhodnější úvěr poskytuje první banka.
4. **Podnikatel chce získat úvěr 5 milionů Kč na jeden rok. První banka nabízí vyplatit celou hotovost a požaduje úrok ve výši 14 % z půjčené částky při její splatnosti. Druhá banka odečte ihned při poskytnutí úvěru z požadované částky 14 % a dlužník po roce splatí 5 milionů Kč. Kolik korun celkem by zaplatil podnikatel první bance?** 3785
 OK Podnikatel by první bance zaplatil po roce celkem 5 700 000 Kč.
5. **Pan Mates zakoupil depozitní certifikát na tři roky za 25 000 Kč. Úroková míra činila 5,6 %; šlo o jednoduché úročení, úročilo se jednou ročně; daň z úroku byla 25 %. Kolik korun pan Mates po třech letech dostal?** 3783
 OK Pan Mates dostal celkem 28 150 Kč.
6. **Pan Král půjčil paní Roubalové 150 000 Kč na čtyři roky. Každý rok bude požadovat jako úrok 10 % z poskytnuté půjčky. Půjčený kapitál spolu s úroky splatí paní Roubalová najednou, až po čtyřech letech. Kolik korun dostane pan Král celkem?** 3782
 OK Pan Král obdrží od paní Roubalové celkem 210 000 Kč.
7. **Chci si od banky půjčit peníze na jeden rok. Víím, že za rok budu mít na splacení úvěru hotovost 36 000 Kč. Banka nabízí úvěr s úrokovou mírou 12,9 %, úrok připisuje jednou, a to v den splatnosti úvěru. Úvěry jsou poskytovány v celých tisících Kč. Kolik korun si mohu maximálně půjčit?** 3784
 OK Mohu si půjčit nejvýše 31 000 Kč.



4. Úroková doba

Úroková doba je doba, po kterou je kapitál úročen.

Platí následující pravidla:

- 1 (finanční) rok je 360 dní
- 1 (finanční) měsíc je 30 dní
- Ze dvou "krajních dnů", tj. dne uložení vkladu (dne poskytnutí úvěru) a dne splatnosti vkladu (dne splatnosti úvěru) se započítává pro výpočet úroku právě jeden z nich

Pozn.: V našich výpočtech budeme započítávat den splatnosti.

Vzorce pro úrok U a kapitál K po t dnech:

$$U = ki \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0$$

$$K = K_0 \left(1 + ki \cdot \frac{t}{360} \right)$$

Vysvětlení použitých veličin:

k	...	zdaňovací koeficient
i	...	úroková míra vyjádřená desetinným číslem
K_0	...	počáteční kapitál (vklad úvěr)
t	...	počet dní, které tvoří úrokovou dobu

Kapitál se úročí jen jednou, v den jeho splatnosti.



5. Složené úrokování

Jednoduché úrokování na účtech není příliš časté. Častěji se používá **složené úrokování**, kdy úroky banka přičítá k jistině a v dalším období platí i úroky i z nich.

Vzorec pro kapitál K_n a pro úrok U_n po n letech při složeném úrokování má následující podobu:

$$K_n = K_0 (1 + ki)^n$$

$$U_n = K_0 [(1 + ki)^n - 1]$$

Vysvětlení veličin použitých ve vzorcích:

k	...	zdaňovací koeficient
i	...	úroková míra vyjádřená desetinným číslem
K_0	...	počáteční kapitál (vklad, úvěr)
n	...	počet let, po který se kapitál úročí (úročí se jednou ročně)

Věřitel po celou dobu žádné částky z vloženého kapitálu ani úroky nepožaduje.

Příklad 1:

Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3 %. Úrokovací období vkladu je 1 rok. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden rok? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka přičítá ke vkladu. Urči jeho majetek vždy na konci roku.

Řešení:

Úrok, který zaplatí banka za 1 rok: $50\,000 \cdot 0,03 = 1\,500$ Kč

Úrok po zdanění: $50\,000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 1\,275$ Kč

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých roků:

Po 1. roce: $50\,000 + 50\,000 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) = 51\,275$ Kč

Po 2. roce: Všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci roku (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího roku $\Rightarrow$ budou se z nich počítat úroky

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 2. rok: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot 0,03 \cdot 0,85$ Kč

Peníze na účtu po 2. roce: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) - \text{jistina z předchozího roku} + 50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot 0,03 \cdot 0,85 - \text{úrok v druhém roce}$

$$50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot 50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) \\ = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^2$$

Po 3. roce: Všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci druhého roku (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího roku $\Rightarrow$ budou se z nich počítat úroky

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 3 rok: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^2 \cdot 0,03 \cdot 0,85$ Kč

Peníze na účtu po 3. roce: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^2$ - jistina z předchozího roku + $50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^2 \cdot 0,03 \cdot 0,85$ - úrok v druhém roce

$$50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^2 + 50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^2 \cdot 0,03 \cdot 0,85 = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85) \\ = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^3$$

Po n-tém roce: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^n$ Kč

Konkrétně po 5-tém roce: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^5 = 56\,708,50$ Kč

O moc více jsme tedy nevydělali.

Příklad 2:

Jakou částku by Pavel našetřil, kdyby peníze za podmínek z předchozího příkladu (50 000 Kč, roční úroková míra 3 %, úrokovací období 1 rok) uložil na 20 let? Jakou částku by ušetřil, kdyby úroková míra stoupla na 4,5 % ?

Řešení:

Spoření dvacet let $\Rightarrow$ použijeme stejný vzorec, změníme $n = 20$:

$$K_n = K_0(1 + ki)^n$$

$$= 50\,000 \cdot (1 + 0,03 \cdot 0,85)^{20} = 82\,733,80 \text{ Kč}$$

úrok 4,5 % $\Rightarrow$ použijeme stejný vzorec, změníme $p = 4,5$:

$$K_n = K_0(1 + ki)^n$$

$$= 50\,000 \cdot (1 + 0,045 \cdot 0,85)^{20} = 105\,927,50 \text{ Kč}$$

Pokud by Pavel uložil své peníze na 20 let, naspořil by 82 733,80 Kč, pokud by úrok dosáhl 4,5 % ušetřil by za 20 let 105 927,50 Kč.



6. Složené úrokování - procvičovací příklady

1. **Paní V. má 200 000 Kč, které chce uložit na začátku příštího roku do banky na tři roky. Rozhoduje se mezi dvěma bankami. Obě banky nabízejí stejnou úrokovou míru 5,2 %, obě úročí jednou za rok, vždy na konci roku, daň z úroku je v obou případech 15 %. Jediný rozdíl je v tom, že v první bance jde o jednoduché úročení, ve druhé o složené úročení.**
a) Ve které bance by získala paní V. celkově vyšší úrok?
b) Vypočítejte úrok za tři roky v první bance a ve druhé bance. Kolik korun je rozdíl v úrocích?
 OK Paní V. by získala vyšší úrok ve druhé bance; 1. banka úrok 26 520 Kč, 2. banka 27 709,50 Kč, rozdíl je tedy 1 189,50 Kč. 3152
2. **Slečna A. si uložila na termínovaný vklad na tři roky 18 000 Kč s roční úrokovou mírou 4,8 %. Jde o složené úročení, banka připsuje úroky jednou ročně, daň z úroku je 15 %. Kolik korun banka slečně A. po třech letech vyplatí ?**
 OK Banka slečně A. vyplatí 20 294,50 Kč. 3145

3. **Pan Štěpán uložil na termínovaný vklad na pět let s úrokovou mírou 5,1 % částku 42 000 Kč. Banka úročí vklad jednou za rok, jde o složené úročení, daň z úroku je 15 %. Kolik korun banka panu Štěpánovi za pět let vyplatí?** 3151

OK Banka panu Štěpánovi vyplatí 51 928 Kč.

4. **Mám 5 000 Kč. Chci tuto částku uložit na začátku roku do banky. Jak vysoká by musela být úroková míra, aby se vklad za 5 let zdvojnásobil? Předpokládám, že banka úročí jednou ročně, vždy na konci roku, že jde o složené úrokování a že daň z úroku je 15 %.** 3794

OK Úroková míra by musela být přibližně 17,5 %.

5. **Mám 5 000 Kč. Na kolik let bych musel uložit tuto částku do banky, aby vzrostla na 6 000 Kč?** 3793

OK Peníze bych musel uložit do banky na 5 let.

6. **Pan Urban si uložil na začátku roku na vkladní knížku s výpovědní lhůtou 7 400 Kč. Úroková míra je 4,15 %, daň z úroku činí 15 %, jde o složené úročení, banka vklady úročí jednou za rok vždy na konci každého roku. Pan Urban si z vkladní knížky žádné peníze (ani úroky) nevybírám. Kolik korun bude mít pan Urban na vkladní knížce na konci třetího roku?** 3150

OK Pan Urban bude mít na vkladní knížce 8 211 Kč.



7. Úrokovací období

Úrokovací období je časový úsek, na jehož konci vzroste kapitál o úrok.

Vzorce pro kapitál K_m a úrok U_m na konci m -tého úrokovacího období při složeném úročení:

$$K_m = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki \right)^m$$

$$U_m = K_0 \left[\left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki \right)^m - 1 \right]$$

Vysvětlení veličin použitých ve vzorcích:

t	...	počet dní tvořících jedno úrokovací období
m	...	celkový počet úrokovacích období
k	...	zdaňovací koeficient
i	...	úroková míra vyjádřená desetinným číslem
K_0	...	počáteční kapitál

Úrokovací období může být:

- roční - značí se p. a. (z lat. per annum)
- pololetní - značí se p. s. (z lat. per semestre)
- čtvrtletní - značí se p. q. (z lat. per quartale)
- měsíční - značí se p. m. (z lat. per mensem)
- týdenní - značí se p. sept. (z lat. per septimanam)
- denní - značí se p. d. (z lat. per diem)

Nejčastěji se v praxi setkáme s úročením ročním.

Příklad 1:

Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3 %. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc. Kolik Kč bude Pavlův majetek za 5 let?

Řešení:

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki\right)^m \quad K\check{c} = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{30}{360} \cdot 0,85 \cdot 0,03\right)^{60} = 56\,792 \text{ K}\check{c}$$

Pavel by měl po 5 letech majetek ve výši 56 792 Kč.

Příklad 2:

Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3 %. Úrokovací období vkladu je 1 měsíc. Kolik Kč zaplatí banka Pavlovi na úrocích za jeden rok? Kolik Kč zbude po zdanění? Pavel bude mít peníze uložené v bance po dobu pěti let. Úroky banka přisuzuje ke vkladu. Urči jeho majetek vždy na konci roku.

Řešení:

Stejný postup jako v předchozím příkladu, ale počítáme po měsících.

Úrok, který zaplatí banka za 1 měsíc: $50\,000 \cdot 0,03 : 12 = 125 \text{ Kč}$

Úrok po zdanění: $50\,000 \cdot 0,03 : 12 \cdot 0,85 = 106,25 \text{ Kč}$

Nyní počítáme Pavlův majetek na konci jednotlivých měsíců:

Po 1. měsíci: $50\,000 + 50\,000 \cdot 0,03 : 12 \cdot 0,85 = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85) = 50\,106,25 \text{ Kč}$

Po 2. měsíci: Všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci 1. měsíce (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího měsíce $\Rightarrow$ budou se z nich počítat úroky:

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 1 měsíc: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85) \cdot 0,03 : 12 \cdot 0,85 \text{ Kč}$

Peníze na účtu po 2. měsíci: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85) - \text{jistina z předchozího měsíce} + 50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85) \cdot 0,03 : 12 \cdot 0,85 - \text{úrok ve 2. měsíci}$

$50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85) + 50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85) \cdot 0,03 : 12 \cdot 0,85 = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85) \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85) = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^2$

Po 3. měsíci: Všechny peníze, které byly na Pavlově účtu na konci druhého měsíce (včetně připsaných úroků), jsou jistinou do dalšího měsíce $\Rightarrow$ budou se z nich počítat úroky:

Úrok po zdanění, který zaplatí banka za 2 měsíce: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^2 \cdot 0,03 : 12 \cdot 0,85 \text{ Kč}$

Peníze na účtu po 3. měsíci: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^2 - \text{jistina z předchozího měsíce} + 50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^2 \cdot 0,03 : 12 \cdot 0,85 - \text{úrok v 3. měsíci}$

$50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^2 + 50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^2 \cdot 0,03 : 12 \cdot 0,85 = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^2 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85) = 50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^3$

Po n-tém měsíci: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^n \text{ Kč}$

Konkrétně po 5. roce, tedy po 60 měsících: $50\,000 \cdot (1 + 0,03 : 12 \cdot 0,85)^{60} = 56\,791,60 \text{ Kč}$

Vzorec pro výpočet naspořené částky při složeném úrokování můžeme používat v případě, že úrokovací období není jednorocní. Roční procentní úrokovou míru však musíme nahradit procentní úrokovou mírou za dané úrokovací období a počet let počtem úrokovacích období.

Příklad 3:

Pavel uložil 50 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3 %. Úrokovací období vkladu je 1 den (jak je běžné na běžném účtu). Jakou částku našetří Pavel za pět let? Přestupnost některého z roků zanedbej.

Řešení:

Použijeme vzorec:

$$K_m = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki \right)^m$$

$$K_0 = 50\,000 \text{ Kč}$$

$$t = 1 \text{ den}$$

$$m = 5 \cdot 365 = 1\,825$$

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki \right)^m \text{ Kč} = 50\,000 \cdot \left(1 + \frac{1}{360} \cdot 0,85 \cdot 0,03 \right)^{1825} = 56\,900 \text{ Kč}$$

Částka se proti měsíční úrokové době zvýšila, ale pouze o velmi málo.

Příklad 4:

Pavel uložil svému synovi při jeho narození 100 000 Kč u banky na termínovaný vklad s roční úrokovou mírou 3,5 % s půlročním úrokovacím obdobím. Jakou částku bude mít syn k dispozici ve věku 18 let?

Řešení:

Použijeme vzorec:

$$K_m = K_0 \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki \right)^m$$

$$K_0 = 100\,000 \text{ Kč}$$

$$t = 360 : 2 = 180$$

$$m = 18 \cdot 2 = 36$$

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki \right)^m \text{ Kč} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{180}{360} \cdot 0,85 \cdot 0,035 \right)^{36} = 170\,157,80 \text{ Kč}$$

Pavel našetří synovi k 18 narozeninám 170 157,80 Kč.

Příklad 5:

Jaký úrok by musela banka poskytovat u úvěru z předchozího příkladu, aby se výsledná našetřená částka rovnala 300 000?

Řešení:

Použijeme předchozí rovnici, výsledná částka je 300 000, neznáme procentní sazbu:

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t}{360} \cdot ki \right)^m \text{ Kč} = 100\,000 \cdot \left(1 + \frac{180}{360} \cdot 0,85 \cdot i \right)^{36} = 300\,000 \text{ Kč}$$

Z uvedených rovnic vypočteme $i = 0,0729 = 7,29\%$

Aby Pavel za 18 let našetřil 300 000 Kč, musel by uložit 100 000 Kč na vklad s úrokem 7,29 %.



8. Úrokovací období - procvičovací příklady

1. Jiří M. uložil na začátku roku do banky na vkladní knížku s úrokovou mírou 3,7 % částku 6 000 Kč. Úrokovací období je čtvrt roku, úročí se vždy na konci kalendářního čtvrtletí. Daň z úroku je 15 %. Kolik korun bude mít Jiří M. na knížce na konci roku po připsání úroku po zdanění?
OK 6 191 Kč 3155
2. Slečna Hlučná si uložila na termínovaný vklad na 1 měsíc s revolvingem částku 80 000 Kč. Vklad byl čtyřikrát obnoven a na konci pátého měsíčního období byl slečně Hlučné na základě její žádosti vyplacen. Slečna Hlučná úroky nevybírala, ty byly připsovány k vkladu a spolu s ním úročeny. Po celé úrokovací období byla úroková míra 4,7 %, úrokovací období je 1 měsíc, poprvé se úročí za měsíc po uložení vkladu. Daň z úroku je 15 %. Vypočítejte, kolik korun bylo slečně Hlučné vyplaceno.
OK 81 340,50 Kč 3157
3. Paní Kárná získala od banky dne 1. 9. úvěr ve výši 40 000 Kč s úrokovou mírou 13 %. Měsíčně bude splácet 2 500 Kč, vždy na konci měsíce, poprvé 30. 9. Úrokovací období je 1 měsíc.
a) Jaký bude stav dluhu paní Kárné dne 30. 9. před první splátkou a po připsání úroku bankou?
b) Jaký bude stav jejího dluhu dne 31. 10. po připsání úroku a po druhé splátce?
OK a) 40 433 Kč b) 35 844 Kč 3165
4. Alena C. si uložila na počátku roku na termínovaný vklad na 2 roky s úrokovou mírou 4,55 % částku 420 000 Kč. Úrokovací období je 1 měsíc, daň z úroku je 15 %.
a) Kolik korun obdržela v den splatnosti vkladu?
b) Kolik korun činil úrok po zdanění?
OK a) 453 720 Kč, b) 33 720 Kč 3166
5. Slečna Malá spoří od začátku roku na počátku každého měsíce 200 Kč. Banka úročí na konci každého kalendářního čtvrtletí, úroková míra je stále 4,4 %, daň z úroku je 15 %.
a) Kolik korun bude mít slečna Malá na konci druhého roku?
b) Kolik korun z toho činí úrok?
OK a) 4 991 Kč b) 191 Kč 3163
6. Pan Šafář získal dne 1. 4. od banky úvěr ve výši 60 000 Kč na dobu 2 let s úrokovou mírou 14 %.
Úrokovací období je 1 měsíc, poprvé dne 30. 4. Banka stanovuje splátky se zaokrouhlením na koruny.
a) Vypočítejte výši jedné splátky
b) Kolik korun zaplatí pan Šafář bance celkem?
OK a) 2 881 Kč b) 69 144 Kč 3164



9. Spoření

Vzorec pro kapitál S_m dosažený při pravidelném spoření stejných částek na konci m -tého úrokovacího období:

$$S_m = K \cdot \frac{q^m - 1}{q - 1}$$

Vysvětlení veličin použitých ve vzorci:

S_m ... naspořený kapitál po m letech

m ... počet úrokovacích období

K ... částka naspořená v jednom úrokovacím období a na konci tohoto období zúročená

V tomto vzorci platí, že:

$$q = 1 + \frac{t}{360} \cdot k \cdot i$$

Vysvětlení veličin použitých ve vzorci:

t ... počet dní tvořících úrokové období

k ... zdaňovací koeficient

i ... úroková míra vyjádřená desetinným číslem

Vzorec platí tehdy, jestliže časový interval mezi po sobě následujícími vklady je kratší nebo roven úrokovacímu období.

Příklad 1:

Kolik Kč nastrádáme za 10 let, jestliže na počátku každého roku vložíme 3 000 Kč, banka úročí 2,6 % na konci každého roku a daň z úroku je 15 %?

Řešení:

$$q = 1 + 0,85 \cdot 0,026 = 1,0221$$

$$S_m = 3000 \cdot 1,0221 \cdot \frac{1,0221^{10} - 1}{1,0221 - 1} = 33899 \text{ Kč}$$

Závěr: Nastrádáme tedy téměř 33 900 Kč.



10. Spoření - procvičovací příklady

- | | | |
|----|---|------|
| 1. | Kolik korun nastrádáme za 5 let, jestliže na počátku každého roku vložíme 12 000 Kč, banka úročí jednou ročně, neměnná úroková míra po celé období je 3 %, daň z úroku je 15 %? | 3159 |
| OK | 64 749 Kč | |
| 2. | Mám 5 000 Kč. Na kolik let musím uložit tuto částku do banky, aby vzrostla na 6 000 Kč? Úroková míra po celou dobu bude 4,4 %, daň z úroku 15 %, jedná se o složené úročení, banka úročí jednou ročně. | 3148 |
| OK | 5 let | |
| 3. | Kolik Kč nastrádáme za 8 let, budeme-li na začátku každého měsíce ukládat 800 Kč, neměnná úroková míra je 2,2 %, daň z úroku 15 %, banka úročí jedenkrát za rok? | 3160 |
| OK | 82 850 Kč | |
| 4. | Kolik korun nastrádáme za 3 roky, jestliže od počátku roku budeme ukládat počátkem každého měsíce 1 000 Kč, banka úročí vklady jednou ročně, úroková míra je 3,9 % a daň z úroku je 15 %? | 3161 |
| OK | 37 874,70 Kč | |
| 5. | Mám 5 000 Kč. Chci tuto částku uložit na začátku roku do banky. Jak vysoká by musela být úroková míra, aby se vklad za 5 let zdvojnásobil? Předpokládám, že banka úročí jednou ročně vždy na konci roku, že jde o složené úročení a daň z úroku je 15 %. | 3149 |
| OK | 17,5 % | |

6. **Jana M. uložila na začátku roku na vkladní knížku s roční úrokovou mírou 4,2 % částku 9 300 Kč. Za jak dlouho bude mít na knížce aspoň 10 000 Kč? Banka úročí jednou ročně, vždy na konci roku. Jde o složené úročení, daň z úroku je 15 %.**

OK 3 roky

7. **a) Kolik Kč nastrádáme za 5 let, když počátkem každého roku vložíme 6 000 Kč při 3% zhodnocení (banka úročí jedenkrát ročně), daň z úroku se pro tento druh spoření (penzijní připojištění) nepatří
b) Kolik korun nastrádáme, budeme-li měsíčně ukládat 500 Kč, ostatní podmínky jsou neměnné?**

OK a) 32 810,50 Kč b) 32 372 Kč

8. **Paní T. spoří od začátku roku na začátku každého měsíce 600 Kč. Banka poskytuje úrokovou míru 4,25 %, úrokovací období je jeden rok, úročení se provádí na konci každého kalendářního roku. Daň z úroku je 15 %.**

- a) Kolik korun uloží paní T. do konce roku celkem?
b) Kolik korun bude mít paní T. na konci roku na vkladní knížce po připsání zdaněného úroku?
c) Kolik korun by měla paní T. na vkladní knížce na konci čtvrtého roku za nezměněných podmínek?**

OK a) 7 200 Kč b) 7 341 Kč c) 30 993,50 Kč

11. Splácení dluhů

Vzorec pro splátku s při pravidelném splácení dluhu stejnými splátkami:

$$s = \frac{D \cdot q^n \cdot (q - 1)}{q^n - 1}$$

Předpokládá se, že splátky se platí od konce prvního úrokovacího období, jednou za úrokovací období, vždy na jeho konci.

Veličiny použité ve vzorci:

D ... počáteční výše dluhu

n ... počet úrokovacích období, tedy počet splátek

$$q = 1 + \frac{t}{360} \cdot i$$

Veličiny použité ve vzorci:

t ... počet dní tvořících úrokovací období

i ... úroková míra vyjádřená desetinným číslem

Příklad 1:

Podnikatel získal začátkem roku od banky úvěr ve výši 2 miliony Kč na dobu tří let s úrokovou mírou 15,5 %. Úrokovací období je 1 rok. Podnikatel splatí úvěr ve třech stejných ročních splátkách, první po jednom roce od poskytnutí úvěru.

a) Kolik korun bude činit jedna splátka?

b) Kolik korun zaplatí podnikatel celkem?

Řešení:

D = 2 000 000 Kč

$$n = 3$$

$$t = 360$$

$$i = 0,155$$

$$q = 1 + 0,155 = 1,155$$

$$s = \frac{2000000 \cdot 1,155^3 \cdot 0,155}{1,155^3 - 1} = 883\,226 \text{ Kč}$$

Celkem zaplatí $n \cdot s = 3 \cdot 883\,226 = 2\,649\,678 \text{ Kč}$

Závěr: Jedna splátka bude činit 883 226 Kč, celkem podnikatel zaplatí 2 649 678 Kč.



12. Splácení dluhů - procvičovací příklady

1. **Pan Mařík uvažuje o tom, že si začátkem příštího měsíce vezme od banky spotřebitelský úvěr ve výši 75 000 Kč. Banka nabízí tento typ úvěru na 12 měsíců, 18 měsíců a 24 měsíců, ve všech případech s úrokovou mírou 14 %. Úrokovací období je 1 měsíc. Splácí se pravidelně jednou měsíčně, stejnými splátkami, poprvé na konci měsíce, ve kterém byl poskytnut spotřebitelský úvěr.**
 a) Vypočítejte výši měsíčních splátek pro všechny tři případy na dobu splatnosti úvěru. Vypočítané částky zaokrouhlete na koruny.
 b) Vypočítejte pro všechny případy, kolik korun by pan Mařík zaplatil bance celkem.
 OK a) 6 734 Kč; 4 644 Kč; 3 601 Kč b) 80 808 Kč; 83 592 Kč; 86 424 Kč 3167
2. **Podnikatel chce získat od příštího roku úvěr 5 milionů Kč na dobu šesti let. První banka nabízí úrokovou míru 14,3 %, druhá banka 14,2 %. Úrokové míry se liší jen o 0,1 %. V obou bankách je úrokovací období 1 rok, splácení by probíhalo formou šesti stejných ročních splátek, první z nich by měla být splacena na konci roku, ve kterém byl poskytnut úvěr.**
 a) Odhadněte, zda rozdíl jedné splátky v první bance a v druhé bance je nižší nebo vyšší než 1 000 Kč
 b) Vypočítejte výši jedné splátky v první a v druhé bance. Vypočítané částky zaokrouhlete na koruny.
 c) Vypočítejte rozdíl částek, které by musel podnikatel celkem splatit první a druhé bance.
 OK b) V 1. bance 1 296 368 Kč, ve 2. bance 1 292 837 Kč c) 3 530 Kč 3169
3. **Manželé Berkovi získali od banky hypotéční úvěr na nový dům ve výši 1 000 000 Kč na dobu 20 let. Úvěr se splácí formou stejných splátek jednou měsíčně, úrokovací období je 1 měsíc.**
 a) Vypočítejte výši měsíční splátky (zaokrouhlenou na koruny) za předpokladu, že úroková míra bude po celou dobu splácení úvěru 8,5 %.
 b) Vypočítejte, kolik korun manželé Berkovi zaplatí ve splátkách za 20 let bance celkem?
 OK a) 8 678 Kč b) 2 082 776 Kč 3168
4. **Kolik zaplatíme celkem, pokud si vypůjčíme 100 000 Kč, které budeme splácet pravidelně měsíčně po dobu dvou let při úrokové míře 12 %, začneme-li splácet až za 1 rok od získání úvěru a vždy na konci měsíce?**
 OK 126 528 Kč 3175
5. **Podnikatel si chce půjčit od banky na začátku na 2 roky 3 miliony Kč. Předpokládá, že po dvou letech bude mít na splacení úvěru 3,5 milionu Kč. Banka nabízí úvěr s úrokovou mírou 14,6%, úročí se jednou ročně, vždy na konci roku (jde o složené úročení). Kolik korun maximálně si může podnikatel půjčit? Banka poskytuje úvěry v celých tisících korunách.**
 OK 2 665 000 Kč 3177

6. **Paní Holubičková požádala pana Krahujce o půjčku ve výši 35 000 Kč na šest let. Pan Krahujec chce stanovit úrokovou míru tak, aby při složeném úročení, které bude provádět jednou ročně, dostal po šesti letech zpět trojnásobek půjčené částky. Kolik procent by byla úroková míra ?** 3154
OK 20 %
7. **Jak velké splátky budeme platit vždy měsíčně, vypůjčíme-li si 100 000 Kč při 6% úroku na:** 3171
a) pět let
b) na deset let?
OK a) 1 933,50 Kč b) 1 110 Kč
8. **Jak velké splátky budeme platit vždy na konci každého roku, jestliže si na 5 let vypůjčíme 200 000 Kč při 4% úroku?** 3170
OK 449 925,50 Kč
9. **Banka poskytla podnikateli počátkem roku úvěr ve výši 2 500 000 Kč na dobu pěti let s úrokovou mírou 14,8 %. Úrokovací období je 1 rok. Podnikatel bude úvěr splácet pravidelně stejnými ročními splátkami, první zaplatí po jednom roce od poskytnutí úvěru.** 3166
a) Vypočítejte výši jedné splátky se zaokrouhlením na koruny
b) Kolik korun zaplatí podnikatel bance celkem?
OK a) 742 260 Kč b) 3 711 300 Kč
10. **Jak velké budou splátky úvěru 100 000 Kč, které budeme splácet pravidelně měsíčně po dobu dvou let při úrokové míře 12 %, začneme-li splácet až za 1 rok od získání úvěru a vždy na konci měsíce?** 3174
OK 5 272 Kč
11. **Kolik zaplatíme celkem při měsíčních splátkách, vypůjčíme-li si 100 000 Kč při 6% úroku na:** 3172
a) pět let
b) na deset let?
OK a) 116 010 Kč b) 133 200 Kč
12. **Podnikatel si chce půjčit od banky na začátku na 2 roky 3 miliony Kč. Předpokládá, že po dvou letech bude mít na splacení úvěru 3,5 milionu Kč. Banka nabízí úvěr s úrokovou mírou 14,6%, úročí se jednou ročně, vždy na konci roku (jde o složené úročení). Bude částka 3,5 milionu Kč na splacení úvěru stačit?** 3166
OK Částka 3,5 milionu Kč stačit nebude.
13. **Družstvo si vypůjčilo 150 000 Kč a má je splatit v sedmi stejných ročních splátkách. První splátka bude za tři roky. Jak velké budou splátky, je-li úroková míra 8 %?** 3173
OK 235 235 Kč

 Obsah

 1. Finanční matematika	2
 2. Jednoduché úrokování	2
 3. Jednoduché úrokování - procvičovací příklady	4
 4. Úroková doba	5
 5. Složené úrokování	6
 6. Složené úrokování - procvičovací příklady	7
 7. Úrokovací období	8
 8. Úrokovací období - procvičovací příklady	11
 9. Spoření	11
 10. Spoření - procvičovací příklady	12
 11. Splácení dluhů	13
 12. Splácení dluhů - procvičovací příklady	14