

Exponenciální rovnice

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

Kopírování a jakékoliv další využití výukového materiálu je povoleno pouze s uvedením odkazu na www.jarjurek.cz.

1. Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnice je taková rovnice, která má neznámou v exponentu.

Exponenciální rovnici můžeme řešit zpravidla třemi postupy (využíváme v uvedeném pořadí):

1. Převodem obou stran rovnice na mocniny o stejném základu

- v tomto případě využijeme vlastnost, že pokud má platit rovnost a mocniny na obou stranách mají stejné základy, musí se sobě rovnat i exponenty. Získáme tak většinou lineární nebo kvadratickou rovnici, kterou už umíme snadno vyřešit.

Příklad 1:

Řešte rovnici:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{81}{256}$$

Řešení:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3^4}{4^4}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^4$$

Závěr: $x = 4$

Příklad 2:

Řešte rovnici:

$$\sqrt[3]{2^{2x-3}} = \sqrt[7]{0,5^{3-x}}$$

Řešení:

$$\sqrt[3]{2^{2x-3}} = \sqrt[7]{2^{x-3}}$$

$$2^{\frac{2x-3}{3}} = 2^{\frac{x-3}{7}}$$

$$\frac{2x-3}{3} = \frac{x-3}{7}$$

$$14x - 21 = 3x - 9$$

$$11x = 12$$

Závěr: $x = 12/11$

Příklad 3:

Řešte rovnici:

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448$$

$$2^x \cdot (2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3}) = 448$$

$$2^x \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = 448$$

$$2^x \cdot \frac{7}{8} = 7 \cdot 2^6$$

$$2^x = 8 \cdot 2^6$$

$$2^x = 2^9$$

Závěr: $x = 9$

2. Substitucí

Substituce nám usnadní řešení, většinou dostaneme kvadratickou rovnici, výjimečně i lineární.

Příklad 4:

Řešte rovnici v oboru reálných čísel:

$$9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Řešení:

$$(3^x)^2 + 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Zavedeme substituci $y = 3^x$

Dostaneme rovnici:

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$(y - 1) \cdot (y + 3) = 0$$

$$y_1 = 1 \quad y_2 = -3$$

Vrátíme se zpět k zavedené substituci:

a) $3^x = 1$

$$3^x = 3^0$$

$$x_1 = 0$$

b) $3^x = -3$

V tomto případě není řešení, protože 3^x je vždy větší než 0.

Závěr: Rovnice má jediné řešení, a to $x = 0$.

3. Logaritmováním

Tento postup používáme tehdy, pokud ani jedním z předchozích dvou postupů nelze řešení dosáhnout. Výsledek většinou pak obsahuje logaritmus.

Příklad 5:

Řešte rovnici:

$$3^{5x} = 5^{3x}$$

Řešení:

Vzhledem k tomu, že nejsme schopni převést obě strany rovnice na stejný základ, použijeme postup, kdy celou rovnici zlogaritmuje:

$$\log 3^{5x} = \log 5^{3x}$$

$$5x \cdot \log 3 = 3x \cdot \log 5$$

$$x \cdot (5\log 3 - 3\log 5) = 0$$

Součin je roven nule tehdy, když aspoň jeden z činitelů je roven nule, proto $x = 0$ (závorka být rovna nule nemůže).

Poznámka: V některých případech se použije i kombinace substitučního postupu s postupem logaritmování.



2. Exponenciální rovnice - procvičovací příklady

1. Řešte rovnici:

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 5^x + 5^{x+1} + 5^{x+2}$$

2374

OK

$$\frac{\log 13 - \log 31}{\log 5 - \log 3}$$

2. Řešte rovnici:

$$2^{3x} \cdot 4^{3x-3} = 8^{2x+1}$$

2363

OK

3

3. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\frac{3^{x-6}}{3^{5-2x}} = \frac{\log 27}{\log 3}$$

2380

OK

4

4. Řešte rovnici:

$$\sqrt[x]{3^{x+3m}} \cdot \sqrt[x]{3^{x-3m}} = 27$$

2364

OK

Nemá řešení

5. Řešte rovnici:

$$4^{x+4} = 1000$$

2370

OK

$$\frac{3 - 4 \log 4}{\log 4}$$

6. Řešte v oboru reálných čísel rovnici:

$$\left(1 - \frac{5}{9}\right)^{\frac{2}{3-2x}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{3}{x-5}}$$

2393

OK

-0,25

7. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$4 \cdot 3^{x+1} - 3^{x-1} = 315$$

2387

OK

3

8. **Řešte rovnici:**
 $4 \cdot 3^{x+1} - 72 = 3^{x+2} + 3^{x-1}$

2367

OK 3

9. **Řešte rovnici:**
 $10^{5-3x} = 2^{7-2x}$

2372

OK $\frac{5 - 7 \log 2}{3 - 2 \log 2}$

10. **Řešte rovnici:**
 $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^8$

2360

OK -4

11. **Řešte v R rovnici:**
 $2^{x+1} + 3 \cdot 2^{x-1} - 5 \cdot 2^x + 6 = 0$

2392

OK 2

12. **Řešte rovnici:**
 $3 \cdot (9^{2x} + 1) = 9^{x+2} + 9^{x-1}$

2376

OK $x_1 = 1,5; x_2 = -1,5$

13. **Řešte rovnici:**
 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x = \frac{1}{96}$

2373

OK $\frac{\log 48}{4 \cdot \log 2}$

14. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:**
 $4^x + 3^{x+3} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$

2381

OK $\frac{\log 7 - \log 4}{\log 3 - \log 4}$

15. **Řešte rovnici:**
 $2^{-x} = \frac{1}{8}$

2357

OK 3

16. **Řešte rovnici:**
 $2^{-x} = 1,8$

2369

OK $-\frac{\log 1,8}{\log 2}$

17. Řešte rovnici:

$$0,25^{2-x} = \frac{256}{2^{x+3}}$$

OK 3

2365

18. Řešte rovnici:

$$(-2)^x = 64$$

OK 6

2359

19. Řešte v R rovnici:

$$3^{2x-1} + 3 \cdot 3^x - 12 = 0$$

OK 1

2391

20. Řešte rovnici:

$$16^{x-1} + 4 \cdot (4^x - 384) = 0$$

OK 3,5

2377

21. Řešte rovnici:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^3$$

OK -3

2358

22. Řešte rovnici:

$$x^x = x$$

OK 1

2371

23. Řešte rovnici v oboru reálných čísel:

$$3 \cdot 2^x + 2^{3-x} = 10$$

OK $x_1 = 1; x_2 = 2 - \log_2 3$

2384

24. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\frac{2^{x+3} \cdot 3^{x+2}}{6^{7-x} \cdot 8^{x-1}} = \frac{9^{x-2}}{3}$$

OK -1

2385

25. V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$4^x - 10 \cdot 2^{x-1} = 24$$

OK 3

2388

26. Řešte rovnici:

$$2^x = 100$$

OK $\frac{2}{\log 2}$

2368

27. Řešte rovnici:

$$2^{3x+1} \cdot 2^{2x+3} = 2^{5x+1} \cdot 2^{x+2}$$

OK 1

2362

28. Řešte v R rovnici:

$$6^{x+1} + 6^{1-x} = 37$$

OK $x_1 = -1; x_2 = 1$

2390

29. **V R řešte rovnici:**

$$5^{1-x} = 7^{x-1}$$

OK 1

2383

30. **Řešte rovnici v oboru reálných čísel:**

$$2^x \cdot 3^{3x} = 4^{x-1}$$

OK
$$\frac{2 \log 2}{\log 2 - 3 \log 3}$$

2382

31. **V oboru reálných čísel řešte rovnici:**

$$\frac{10^{x^2}}{2^{-15}} = \frac{5^{-15}}{10^{12-12x}}$$

OK $x_1 = 3; x_2 = 9$

2386

32. **Řešte rovnici:**

$$3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} = 315$$

OK 3

2366

33. **Řešte v R rovnici:**

$$4^x - 9 \cdot 2^x + 8 = 0$$

OK $x_1 = 0; x_2 = 3$

2389

34. **Řešte rovnici:**

$$\left(\frac{4}{25}\right)^{x+3} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{4x-1} = \frac{5}{2}$$

OK 1

2379

35. **Řešte rovnici:**

$$x\sqrt[3]{81} - 8 \cdot (2x\sqrt[3]{81} - 2) = 1$$

OK
$$x_1 = 2; x_2 = \frac{2 \log 3}{\log 5}$$

2378

36. **Řešte rovnici:**

$$x+2\sqrt[3]{27} = x+1\sqrt[3]{9}$$

OK 1

2361

37. **Řešte rovnici:**

$$4^x + 3^{x+4} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$$

OK
$$\frac{1 - \log 7}{\log 4 - \log 3}$$

2375

 **Obsah**

- | | |
|--|---|
|  1. Exponenciální rovnice | 2 |
|  2. Exponenciální rovnice - procvičovací příklady | 4 |