Variace

1

Dělitelnost čísel, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel

Autor: Mgr. Jaromír JUŘEK

1. Dělitelnost

Dělitelnost čísel

Dělitel daného čísla je takové číslo, kterým můžeme dané číslo beze zbytku dělit.

Prvočísla jsou taková čísla, která mají za dělitele pouze číslo jedna a sama sebe.

Čísla, která mají kromě jedničky a sama sebe ještě alespoň jednoho dělitele, se nazývají **čísla složená.**

Příklad 1:

Vypište všechny dělitele čísla 12 a čísla 7.

Řešení:

12 - je číslo složené (dělitelem je 1, 2, 3, 4, 6, 12)

7 - prvočíslo (dělitelem je pouze 1, 7)

Dělitelnost přirozených čísel (znaky dělitelnosti):

Dělitelnost číslem 0:

"Číslem nula nelze nikdy dělit".

Dělitelnost číslem 1:

"Číslo je dělitelné číslem jedna vždy"

Dělitelnost číslem 2:

"Číslo je dělitelné číslem 2, je-li sudé (tj. je-li zakončeno sudou číslicí)".

Dělitelnost číslem 3:

"Číslo je dělitelné číslem 3, je-li jeho ciferný součet dělitelný třemi".

Dělitelnost číslem 4:

"Číslo je dělitelné čtyřmi, je-li jeho poslední dvojčíslí dělitelné číslem 4".

Dělitelnost číslem 5:

"Číslo je dělitelné pěti, končí-li číslicí 5 nebo 0".

Dělitelnost číslem 6:

"Číslo je dělitelné šesti, je-li dělitelné současně dvěma i třemi".

Dělitelnost číslem 7:

- znak dělitelnosti existuje, ale je natolik složitý, že je rychlejší se o dělitelnosti čísla sedmičkou přesvědčit pouhým vydělením sedmi. Znak se tedy moc nepoužívá.

Přesto tento znak dělitelnosti existuje, a to hned ve dvou modifikacích:

1. způsob:

Postup: Číslo rozdělíme od konce na dvojciferná čísla. Tato čísla násobíme od konce čísly 1, 2, 4, ... Sečtením součinů dostaneme KLÍČOVÉ ČÍSLO. Je-li klíčové číslo dělitelné sedmi, pak je dělitelné sedmi i původní číslo.

2. způsob:

U zadaného čísla postupně první, druhou, třetí, ..., n-tou číslici odzadu (tj. zprava doleva) znásobíme postupně čísly periodicky se opakující posloupnosti 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, ... a takto vzniklé součiny poté sečteme.Vznikne klíčové číslo, které pokud je dělitelné sedmi, pak je dělitelné sedmi i původní zadané číslo.

Dělitelnost číslem 8:

"Číslo je dělitelné osmi, je-li jeho poslední trojčíslí dělitelné osmi".

Dělitelnost číslem 9:

"Číslo je dělitelné devíti, je-li jeho ciferný součet dělitelný devíti".

Dělitelnost číslem 10:

"Číslo je dělitelné deseti, končí-li číslicí nula".

Dělitelnost číslem 11:

"Číslo je dělitelné jedenácti, je-li rozdíl součtu číslic na sudých pozicích a součtu číslic na lichých pozicích čísla dělitelný jedenácti".

Čísla, která mají kromě jedničky ještě alespoň jednoho společného dělitele, se nazývají **čísla soudělná.**

Příklady:
2, 40
15, 60, 36

Čísla, která nemají kromě jedničky žádného společného dělitele, se nazývají **čísla nesoudělná.**

Příklady:
5, 13
11, 15, 23

Znaky dělitelnosti pro vyšší čísla:

Lze-li libovolné číslo rozdělit na součin dvou nesoudělných čísel, pak platí, že původní číslo je dělitelné součinem, je-li dělitelné každým činitelem.

Příklad 2:

Určete, zda čísla 330 a 240 jsou dělitelná patnácti.

Řešení:

Číslo 330 je dělitelné třemi i pěti, proto je dělitelné i patnácti.

Číslo 240 je dělitelné třemi i pěti, proto je též dělitelné patnácti.

Univerzální znak dělitelnosti

Příklad 3:

Máme rozhodnout, zda je číslo 4 389 dělitelné sedmi.

Řešení:

Vypočteme konstantu k = 10 - 7 = 3. Konstantou vynásobíme číslici nejvyššího řádu (tj. 4) a k součinu připočteme číslici nižšího řádu (tj. 3). Součet dělíme dělitelem 7 a zaznamenáme zbytek dělení (tj. 1). Tento zbytek násobíme konstantou 3, k součinu přičteme číslici dalšího nižšího řádu (tj. 8), součet dělíme dělitelem 7 a opět zaznamenáme zbytek dělení (tj. 4). Zbytek násobíme konstantou 3, k součinu přičteme číslici nejnižšího řádu (tj. 9), součet dělíme dělitelem 7, a protože dělení vyšlo beze zbytku, znamená to, že je číslo 4 389 dělitelné sedmi.

Čísla dokonalá a spřátelená

Dokonalé číslo je v matematice označení pro číslo, u kterého platí, že je součtem všech svých kladných dělitelů (kromě sebe samotného). Například číslo 6 má dělitele 1, 2, 3 a platí, že 1 + 2 + 3 = 6. Dalšími takovými čísly jsou ještě např. 28, 496, 8128. Tato čtyři dokonalá čísla byla známa již ve starověkém Řecku. Dnes je zatím známo celkem 46 dokonalých čísel.

Spřátelená čísla (též přátelská, svázaná) jsou dvě přirozená čísla taková, že součet všech kladných dělitelů jednoho čísla (kromě čísla samotného) se rovná druhému číslu a naopak – součet všech dělitelů druhého čísla (kromě něho samotného) se rovná prvnímu. Na podobném základu stojí už zmíněná dokonalá čísla, která se rovnají přímo součtu všech svých dělitelů.

Nejmenším párem spřátelených čísel je dvojice 220 a 284. Všichni kladní dělitelé 220 kromě 220 samotné jsou 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 a 110, jejich součet je roven 284. Obráceně všechny dělitelé 284 jsou 1, 2, 4, 71 a 142, jejichž součet je roven 220.

Několik prvních párů spřátelených čísel: (220, 284), (1 184, 1 210), (2 620, 2 924), (5 020, 5 564), (6 232, 6 368).

2. Nejmenší společný násobek, největší společný dělitel

Nejmenší společný násobek

Násobek dvou nebo více čísel je číslo, které lze všemi zadanými čísly beze zbytku vydělit. V praxi často hledáme takové číslo nejmenší a to pak tedy nazýváme nejmenší společný násobek.

Postup pro určení nejmenšího společného násobku dvou nebo více čísel:

Příklad 1:

Určete nejmenší společný násobek čísel 20 a 24:

Řešení:

Hledáme postupně co nejmenšího prvočíselného dělitele (začínáme číslem 2, pak 3, pak 5, pak 7,...)

20 = 2 . 10 = 2 . 2 . 5

24 = 2 . 12 = 2 . 2 . 6 = 2 . 2 . 2 . 3

- čísla, která se opakují v obou rozkladech (nebo alespoň ve dvou rozkladech při více číslech), píšeme pouze jednou, dále do součinu doplníme i zbylá čísla: 2 . 2 . 2 . 3 . 5 = 120

Závěr: n(20, 24) = 120

Příklad 2:

Určete nejmenší společný násobek čísel 10, 18, 27.

Řešení:

10 = 2 . 5

18 = 2 . 3 . 3

27 = 3 . 3 . 3

----

n(10, 18, 27) = 2 . 3 . 3 . 5 . 3 = 270

Pozn.: Nejmenší společný násobek můžeme určit také pokusem, a to tak, že vezmeme největší ze zadaných čísel a zkoumáme, zda je dělitelné zbývajícími čísly. Pokud ano, jsme hotovi. Pokud ne, bereme postupně dvojnásobek, trojnásobek, atd. největšího čísla a vždy zkoumáme, zda je dělitelný zbývajícími čísly. Jakmile je tato podmínka splněna, jsme hotovi.

Největší společný dělitel

Dělitel dvou nebo více čísel je číslo, kterým lze všechna zadaná čísla beze zbytku vydělit. V praxi většinou hledáme největší takové číslo a to pak nazýváme největší společný dělitel.

Postup pro určení největšího společného dělitele dvou nebo více čísel:

Příklad 3:

Určete největší společný dělitel čísel 24 a 30.

Řešení:

24 = 2 . 2 . 2 . 3

30 = 2 . 3 . 5

- čísla, která se opět v rozkladech opakují, píšeme do součinu pouze jednou; další zbylá čísla ale už nepíšeme:

2 . 3 = 6

Závěr: D(24, 30) = 6

Pokud máme zadáno více čísel, do výsledného součinu píšeme pouze ta čísla, která se opakují v rozkladech všech čísel.

Příklad 4:

Určete největší společný dělitel čísel 36, 60 a 30.

Řešení:

36 = 2 . 2 . 3 . 3

60 = 2 . 2 . 3 . 5

30 = 2 . 3 . 5

D(36; 60; 30) = 2 . 3 = 6

Závěr: D(36; 60; 30) = 6

Obsah